

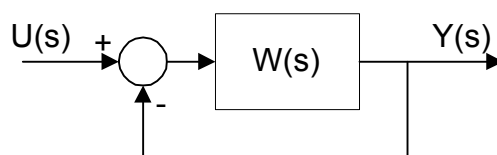
Geometrijsko mesto korena

U dosadašnjem delu kursa su, između ostalog, bile razmatrane karakteristike SAU i povezanost tih karakteristika sa položajem polova sistema u kompleksnoj ravni. Uočena je direktna zavisnost karaktera odziva, tačnosti rada sistema u stacionarnom stanju, stabilnosti sistema i sl. od položaja polova sistema u kompleksnoj s-ravni. Sa druge strane, položaj polova u kompleksnoj s-ravni zavisi od parametara sistema, koji mogu biti promenljivi ili konstantni. Iz dosad pomenutog se može zaključiti da je veoma korisno poznavati zavisnost položaja polova u kompleksnoj s-ravni od vrednosti parametara sistema jer se na taj način može uspostaviti direktna veza između vrednosti parametara i određenih karakteristika sistema (na primer: veza između pojačanja K funkcije povratnog prenosa i stabilnosti ili preskoka u oscilatornom odskočnom odzivu SAU).

Kada je navedena veza poznata moguće je podesiti parametre sistema tako da određena karakteristika dobije željeni kvalitet, odnosno sistem željeni odziv (ponašanje) za određenu pobudu. U cilju podešavanja parametara, da bi se sistem ponašao u skladu sa zahtevima koji se pred njega postavljaju, veoma je dobro poznavati ponašanje (kretanje) polova sistema u kompleksnoj s-ravni u funkciji promene pojedinih parametara sistema. Grafik koji prikazuje ovu zavisnost je geometrijsko mesto korena (GMK). Odnosno, GMK je metod pomoću koga je moguće skicirati ponašanje (položaj, kretanje) polova u kompleksnoj s-ravni u zavisnosti od promene vrednosti pojedinih parametara sistema. Ova metoda se često koristi u sprezi sa Routh-Hurwitz-ovom metodom analize stabilnosti i predstavlja veoma dobro sredstvo za analizu i sintezu SAU. GMK pruža grafičku informaciju i ta skica može biti veoma dobar izvor informacija o stabilnosti i ostalim karakteristikama SAU. Dalje, na osnovu skice GMK je moguće izvršiti izbor vrednosti određenih parametara sistema radi postizanja željenih karakteristika, kao i dodavanje novih elemenata u sistem ako se željene karakteristike ne mogu postići jednostavnom promenom vrednosti parametara.

Osnovni koncept GMK

Posmatra se elementarna upravljačka struktura, prikazana na slici 1 (i na tu upravljačku će se odnositi sva dalja razmatranja vezana za GMK).



Slika 1. Elementarna upravljačka struktura sa jediničnom negativnom povratnom spregom

Neka je:

$$W(s) = K \cdot \frac{P_m(s)}{Q_n(s)}, \quad (1)$$

$$P_m(s) = b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0, \quad (b_m, b_{m-1}, \dots, b_0 = \text{const.} \wedge b_m, b_{m-1}, \dots, b_0 \in \text{Re}), \quad (2)$$

$$Q_n(s) = s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0, \quad (a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 = \text{const.} \wedge a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_0 \in \text{Re}). \quad (3)$$

i neka je pojačanje K jedini promenljivi parametar u sistemu (pokazaće se kasnije da to nije jedini slučaj, ali da se promena bilo kog parametra može svesti na promenu pojačanja). Takođe, u daljem razmatranju će se smatrati da je $n \geq m$ i to neće biti posebno naglašavano. Funkcija spregnutog prenosa je:

$$W_s(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} \quad (4)$$

Karakteristična jednačina je:

$$1+W(s)=0, \quad (5)$$

njeno rešenje je:

$$W(s)=-1, \quad (6)$$

što se može napisati u obliku:

$$|W(s)| \cdot e^{j \cdot \text{Arg}\{W(s)\}} = 1 \cdot e^{j \cdot (\pi + 2k\pi)^*}, \quad (k=0, 1, 2, \dots), \quad (7)$$

odnosno

$$|W(s)| = 1, \quad (8)$$

$$\text{Arg}\{W(s)\} = (2k+1)\pi, \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (9)$$

Iz izraza (8) i (9) se vidi da su rešenja karakteristične jednačine sve one tačke iz kompleksne s-ravni za koje je moduo funkcije povratnog prenosa jednak jedinici, a argument funkcije povratnog prenosa jednak $(2k+1)\pi$. Rešenja karakteristične jednačine su karakteristične (sopstvene) vrednosti, odnosno polovi sistema, ili drugim rečima polovi funkcije spregnutog prenosa. Smenom izraza (1) u izraze (8) i (9) sledi:

$$\left| K \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \right| = 1, \quad (10)$$

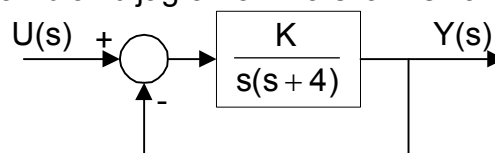
$$\text{Arg} \left\{ K \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \right\} = (2k+1)\pi \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (11)$$

Iz izraza (10) i (11) se vidi da položaj polova funkcije spregnutog prenosa u kompleksnoj s-ravni zavisi od promenljivog pojačanja K . Sada se može definisati geometrijsko mesto korena.

Definicija 1. Geometrijsko mesto korena sačinjavaju krive u kompleksnoj s-ravni po kojima se kreću polovi funkcije spregnutog prenosa, odnosno koreni karakteristične jednačine, kada se faktor pojačanja K funkcije povratnog prenosa menja od nule do beskonačnosti. Smer grana je određen smerom porasta pojačanja.

Definicija 2. Geometrijsko mesto korena se sastoji od tačaka s_i kompleksne s-ravni u kojima je moduo funkcije povratnog prenosa jednak jedinici ($|W(s)| = 1$) a argument funkcije povratnog prenosa jednak $\pm 180^\circ$ ($\text{Arg}\{W(s)\} = (2k+1)\pi, k=0, 1, 2, \dots$)

Primer 1: Za sistem prikazan blok dijagramom na slici 2 skicirati GMK.



Slika 1.1. Blok dijagram analiziranog sistema

$$W_s(s) = \frac{\frac{K}{s(s+4)}}{1 + \frac{K}{s(s+4)}} = \frac{K}{s^2 + 4s + K} \quad (1.1)$$

* Formalno, bilo bi ispravno pisati $\pm\pi \pm 2k\pi$, ali pošto nema uticaja na izlaganje, zbog jednostavnosti se usvaja $(2k+1)\pi$.

$$f(s)=s^2+4s+K=0 \Rightarrow s_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-K} \quad (1.2)$$

Na osnovu poslednjeg izraza se vidi, da će za promenljivo $K \in [0, \infty)$ vrednosti $s_{1,2}$ takođe biti promenljive. Tabela 1.1 pokazuje zavisnost položaja polova $s_{1,2}$ od vrednosti pojačanja K .

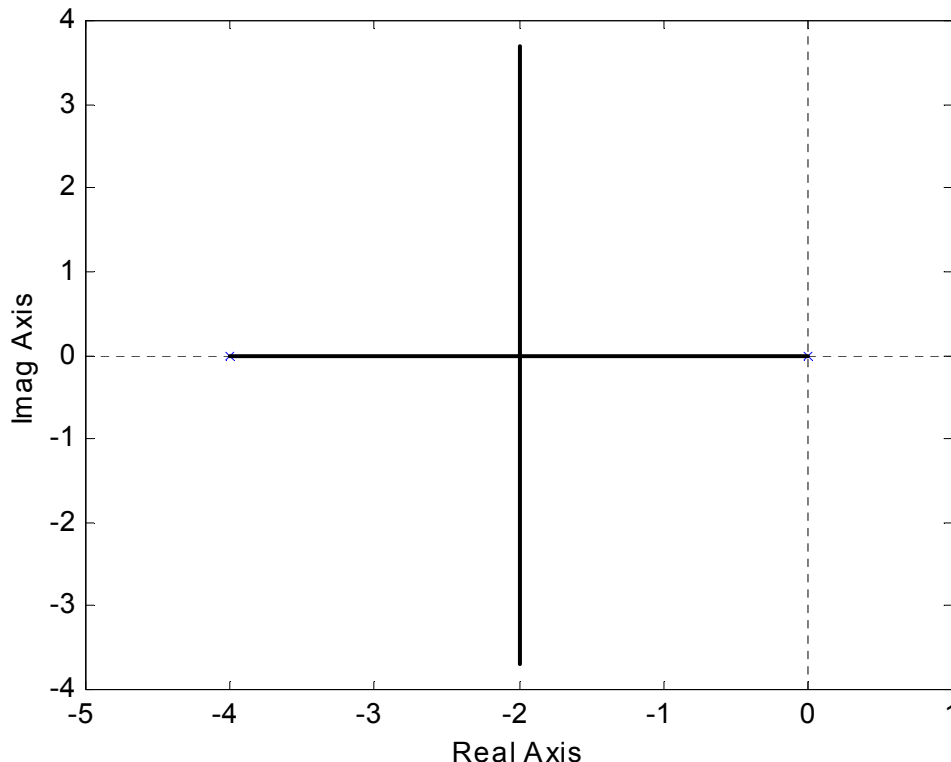
K	s_1	s_2
0	0	-4
3	-1	-3
4	-2	-2
5	$-2+j1$	$-2-j1$
104	$-2+j10$	$-2-j10$
∞	$-2+j\infty$	$-2-j\infty$

Tabela 1.1. Zavisnost položaja polova $s_{1,2}$ od vrednosti pojačanja K .

Na osnovu izraza (1.2) i tabele 1.1., mogu se uočiti tri karakteristična intervala vrednosti K :

- I. $0 \leq K < 4 \Rightarrow s_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4-K}$, $s_1 \neq s_2$, $s_{1,2} \in \text{Re}$;
- II. $K = 4 \Rightarrow s_{1,2} = -2$, $s_1 = s_2$, $s_{1,2} \in \text{Re}$;
- III. $4 < K < \infty \Rightarrow s_{1,2} = -2 \pm j\sqrt{K-4}$, $s_1 = s_2^*$, $s_{1,2} \in \text{C}$;

Podaci iz tabele 1.1 se mogu predstaviti grafički u obliku krivih linija po kojima se kreću polovi $s_{1,2}$ sistema kada se pojačanje K menja od 0 do ∞ . Te krive linije predstavljaju geometrijsko mesto korena sistema i prikazane su na slici 1.2. **Važno: smer grana je smer porasta pojačanja!**



Slika 1.2. Geometrijsko mesto korena sistema

Šta se na osnovu slike 1.2 može zaključiti?

- Stabilnost: $\forall K > 0 \Rightarrow \text{Re}\{s_{1,2}\} < 0 \Rightarrow$ Sistem će biti stabilan $\forall K > 0$;

- Odskočni odziv: $0 \leq K < 4 \Rightarrow s_1 \neq s_2, s_{1,2} \in \text{Re} \Rightarrow$ Odskočni odziv sistema je aperiodičan;
 $K=4 \Rightarrow s_1=s_2, s_{1,2} \in \text{Re} \Rightarrow$ Odskočni odziv sistema je kritično (granično) aperiodičan;
 $4 < K < \infty \Rightarrow s_1=s_2^*, s_{1,2} \in \text{C} \Rightarrow$ Odskočni odziv sistema je oscilatoran;
- Karakteristike odziva: $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$ gde je: ξ – relativni koeficijent prigušenja i ω_n – sopstvena neprigušena učestanost. Uočava se da pri porastu K ($K > 4$) ω_n raste a ξ se smanjuje, odnosno raste frekvencija, preskok i period ulaska odskočnog odziva u stacionarno stanje. To znači da je izborom određenog pola (podešavanjem pojačanja K) moguće podesiti tip i karakteristike odskočnog odziva sistema i postaviti ih na željenu vrednost.



Način formiranja GMK kako je to prikazano u prethodnom primeru se najčešće ne primenjuje. Razlog je jednostavan. Bilo bi potrebno rešavati algebarsku jednačinu (često većeg stepena od 2) veći broj puta (za različite vrednosti pojačanja K) kako bi se dobio dovoljan broj tačaka za skiciranje GMK (mada softverski paketi tipa Matlaba i sl. rade na takav način). Iz tog razloga se za konstruisanje GMK nekog sistema (kada pri ruci nije računar i odgovarajući softver) koriste *pravila za crtanje GMK*. Pre nego što se pređe na formiranje skupa pravila za crtanje GMK potrebno je navesti još neke osobine GMK.

Pri formiranju GMK pretpostavlja se da su sve nule i polovi funkcije povratnog prenosa poznati, odnosno da je funkciju povratnog prenosa moguće napisati u sledećoj formi:

$$W(s) = K \cdot \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = K \cdot \frac{(s-z_1)(s-z_2)\dots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s-z_i)}{\prod_{l=1}^n (s-p_l)} \quad (12)$$

Karakteristična jednačina se sada može napisati u obliku:

$$K \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (|s-z_i| \cdot e^{j \text{Arg}(s-z_i)})}{\prod_{l=1}^n (|s-p_l| \cdot e^{j \text{Arg}(s-p_l)})} = 1 \cdot e^{j(2k+1)\pi} \quad (13)$$

$$K \cdot \frac{\left(\prod_{i=1}^m |s-z_i| \right) \cdot e^{j \sum_{i=1}^m \text{Arg}(s-z_i)}}{\prod_{l=1}^n (|s-p_l| \cdot e^{j \text{Arg}(s-p_l)})} = 1 \cdot e^{j(2k+1)\pi} \quad (14)$$

$$K \cdot \frac{\left(\prod_{i=1}^m |s-z_i| \right) \cdot e^{j \left(\sum_{i=1}^m \text{Arg}(s-z_i) - \sum_{l=1}^n \text{Arg}(s-p_l) \right)}}{\left(\prod_{l=1}^n |s-p_l| \right)} = 1 \cdot e^{j(2k+1)\pi} \quad (15)$$

Nakon razdvajanja jednačina iz izraza (15) sledi:

$$K \cdot \frac{\left(\prod_{i=1}^m |s-z_i| \right)}{\left(\prod_{l=1}^n |s-p_l| \right)} = 1 \quad (16)$$

$$\sum_{i=1}^m \text{Arg}(s-z_i) - \sum_{l=1}^n \text{Arg}(s-p_l) = (2k+1)\pi \quad (17)$$

Poslednje dve jednačine važe za bilo koju tačku s -ravni koja pripada GMK, što je ilustrovano sledećim primerom. Posmatra se sistem sa 4 pola (p_1, p_2, p_3 i p_4) i 2 nule (z_1 i z_2) prikazan na slici 2. Neka je s_x proizvoljna tačka koja leži na GMK sistema. Tada za nju važe sledeći izrazi:

$$K \cdot \frac{|s_x-z_1| \cdot |s_x-z_2|}{|s_x-p_1| \cdot |s_x-p_2| \cdot |s_x-p_3| \cdot |s_x-p_4|} = 1 \quad (18)$$

Sa slike 2 se vidi da je $|s_x-z_i| = \rho_{zi}$ ($i=1,2$) i $|s_x-p_j| = \rho_{pj}$ ($j=1,2,3,4$), pa se izraz (18) može napisati u obliku:

$$K \cdot \frac{\rho_{z1}\rho_{z2}}{\rho_{p1}\rho_{p2}\rho_{p3}\rho_{p4}} = 1, \quad (19)$$

odakle sledi:

$$K = \frac{\rho_{p1}\rho_{p2}\rho_{p3}\rho_{p4}}{\rho_{z1}\rho_{z2}}, \quad (20)$$

izraz za određivanje pojačanja funkcije povratnog prenosa u proizvoljnoj tački GMK.

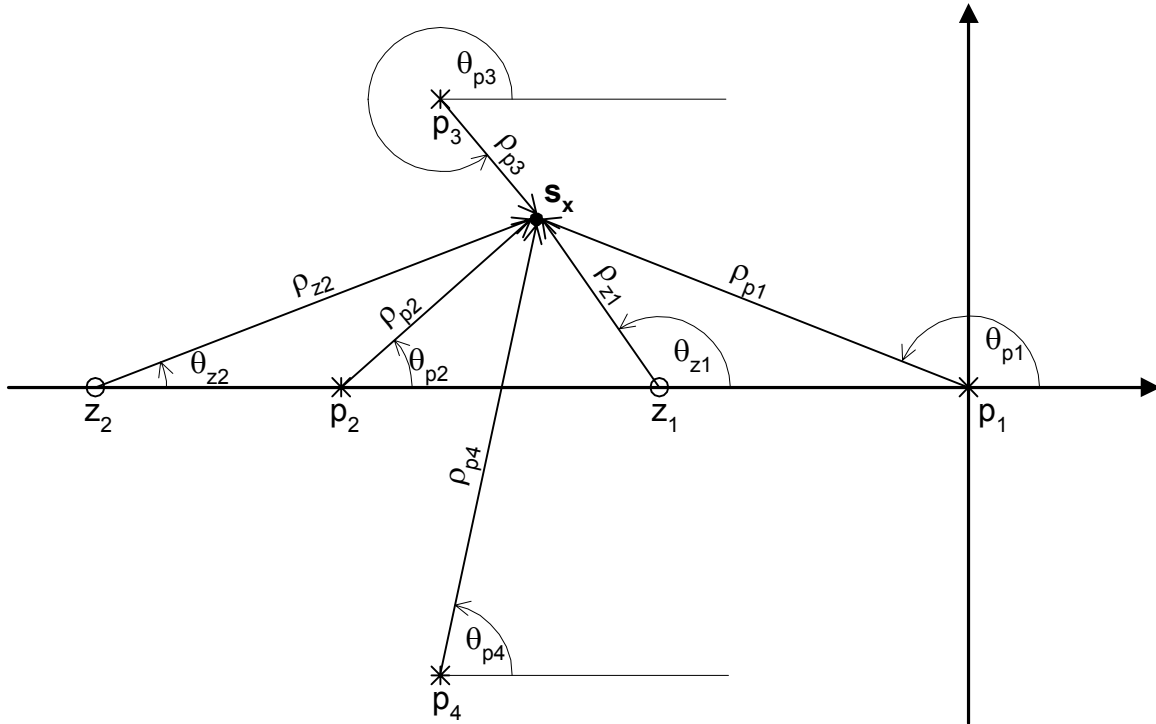
Za tačku s_x takođe važi:

$$\sum_{i=1}^2 \text{Arg}(s_x-z_i) - \sum_{j=1}^4 \text{Arg}(s_x-p_j) = \pm 180^\circ. \quad (21)$$

Sa slike 2 se vidi da je $\text{Arg}(s_x-z_i) = \theta_{zi}$ ($i=1,2$) i $\text{Arg}(s_x-p_j) = \theta_{pj}$ ($j=1,2,3,4$), pa se izraz (21) može napisati u obliku

$$\sum_{i=1}^2 \theta_{zi} - \sum_{j=1}^4 \theta_{pj} = \pm 180^\circ, \quad (22)$$

što predstavlja izraz koji se najčešće koristi za ispitivanje pripadnosti neke tačke geometrijskom mestu korena.



Slika 2.

Primena metoda geometrijskog mesta korena na određivanje uticaja promene pojedinih parametara na lokaciju polova sistema

Do sada su bili razmatrani slučajevi kada je jedini promenljiv parametar i sistemu bilo pojačanje K funkcije povratnog prenosa $W(s)$. Šta se dešava, odnosno kako se konstruiše GMK ako se menja neki drugi parametar, ili više njih?

Sistem je opisan karakterističnim polinomom:

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0. \quad (74)$$

Neka je jedan od koeficijenata a_i promenljiv, i neka je dat kao zbir konstante (*const.*) i promenljivog parametra α , odnosno $a_i = \text{const.} + \alpha$. Sada se jednačina (74) može napisati u obliku:

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + (\text{const.} + \alpha) s^i + \dots + a_1 s + a_0 = 0, \quad (75)$$

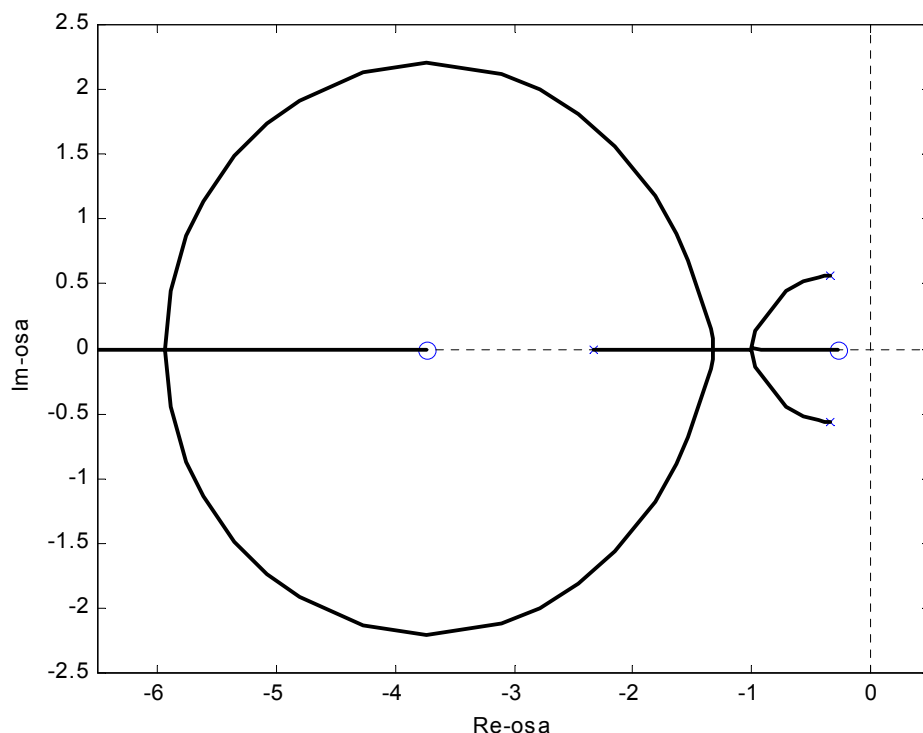
a na osnovu nje se formira pomoćna funkcija povratnog prenosa $W^*(s)$:

$$W^*(s) = \alpha \cdot \frac{s^i}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + \text{const.} \cdot s^i + \dots + a_1 s + a_0}. \quad (76)$$

Vidi se da je $W^*(s)$ u obliku pogodnom za konstrukciju GMK, promenljivo pojačanje koje množi razlomak dva polinoma sa konstantnim koeficijentima. Isti je postupak ako više sabiraka karakterističnog polinoma $f(s)$ sadrži promenljivi parametar α . Svi sabirci koji sadrže α se grupišu i formiraju brojilac pomoćne funkcije povratnog prenosa a ostatak polinoma $f(s)$ imenilac.

Primer 3: Konstruisati GMK sistema opisanog karakterističnim polinomom $f(s) = s^3 + (3 + \alpha)s^2 + (2 + 4\alpha)s + 1 + \alpha$, gde je α promenljivi parametar.

Karakteristični polinom se može napisati u obliku: $f(s) = \alpha s^2 + 4\alpha s + \alpha + s^3 + 3s^2 + 2s + 1$, i može se formirati pomoćna funkcija povratnog prenosa: $W^*(s) = \alpha \cdot \frac{s^2 + 4s + 1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1}$. Slika odgovarajućeg GMK je prikazana na slici 3.1.



Slika 3.1



Da li se pomoćna funkcija povratnog prenosa $W^*(s)$ sme formirati na gore navedeni način? Da, naravno. U gore pomenutom postupku formira se pomoćna funkcija povratnog prenosa u obliku pogodnom za konstruisanje GMK. Pošto se GMK konstruiše na osnovu poznate funkcije povratnog prenosa sistema pitanje je da li je pomoćna funkcija ispravna, odnosno da li konstruisano GMK baš odgovara sistemu opisanom karakterističnom polinomom $f(s)$? Odgovor na ovo pitanje se nameće iz same definicije GMK u kojoj se kaže da se po granama GMK kreću polovi spregnutog prenosa kada se pojačanje K , povratnog prenosa, menja od 0 do ∞ . To znači da će svi sistemi sa istim karakterističnim polinomom $f(s)$, nakon zatvaranja povratne sprege, imati isto GMK bez obzira na oblik njihove funkcije povratnog prenosa $W(s)$, pa je i gore pomenuti postupak ispravan.

Kakav je postupak u slučaju varijacije više parametara (na primer α i β)? U tom slučaju se posmatraju efekti promene jednog parametra (na primer α) i nakon toga za fiksiranu vrednost α uticaji promene β , što će biti pokazano na sledećem primeru.

Primer 4: Ispitati uticaj promene vrednosti parametara α i β na položaj polova (GMK) sistema opisanog karakterističnim polinomom: $f(s)=s^3+s^2+\beta s+\alpha$.

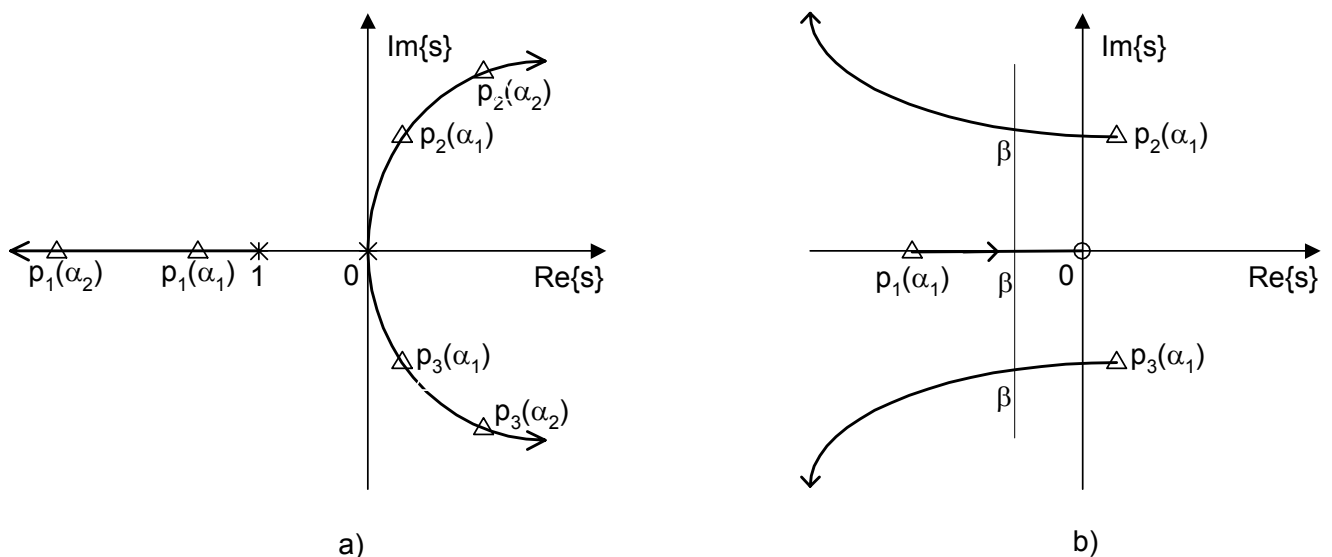
Efekti uticaja parametra β na GMK sistema se analiziraju na osnovu funkcije povratnog prenosa $W^*(s)=\frac{\beta s}{s^3+s^2+\alpha}$. Imenilac ove funkcije je u stvari $f(s)$ za $\beta=0$. Pa se može

posmatrati $f(s)=s^3+s^2+\alpha$, odnosno $W_1(s)=\frac{\alpha}{s^2(s+1)}$. Odgovarajuće GMK za $W_1(s)$ je

prikazano na slici 4.1.a. Sada se izabere pogodna vrednost parametra α , na primer α_1 i

odrede $p_1(\alpha_1)$, $p_2(\alpha_1)$, $p_3(\alpha_1)$. Ovi polovi su u stvari polovi funkcije: $W^*(s)=\frac{\beta s}{s^3+s^2+\alpha_1}$, i iz njih

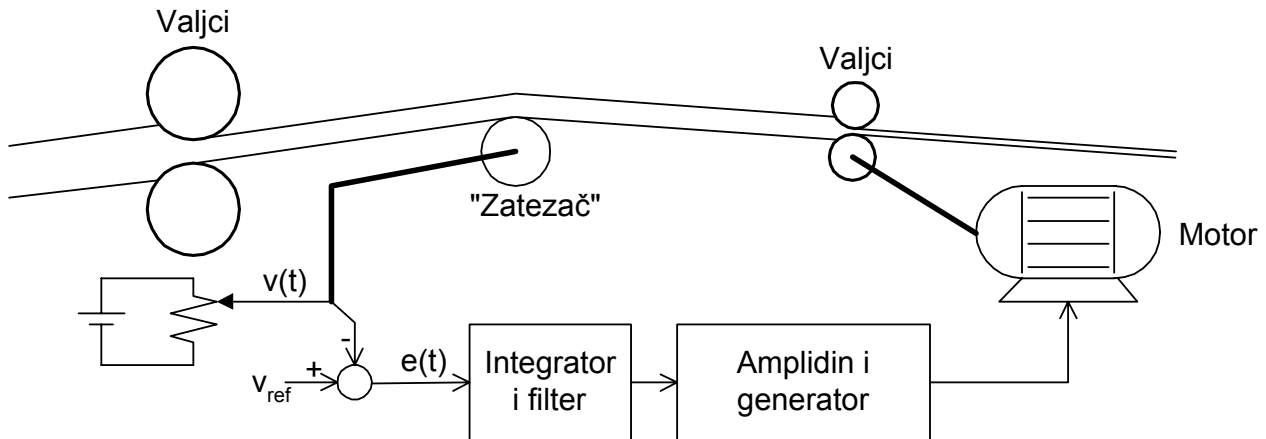
kreću grane novog GMK, prikazanog na slici 4.1.b. Izbor vrednosti parametra α se vrši na osnovu željenih osobina sistema.



Slika 4.1.

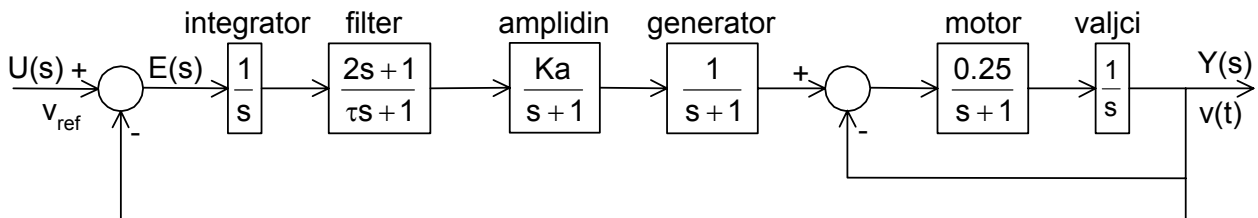


Primer 5: Na slici 5.1 je prikazan sistem za regulaciju zategnutosti čelične trake u “vrućoj” valjaonici lima (tipična brzina trake je $\approx 10\text{m/s}$).



Slika 5.1.

Deo sistema koji služi za merenje zategnutosti trake je sastavljen od jedne “ruke” dužine $\approx 1\text{m}$ na čijem je jednom kraju valjak (“zatezač”) preko koga prelazi traka, a na drugom klizni kontakt potencijometra. U zavisnosti od zategnutosti trake pritisak na “zatezač” se povećava ili smanjuje. Promena pritiska rezultuje pomeranjem “ruke” gore-dole a time i kliznog kontakta potencijometra. Na taj način se postiže da napon ($e(t)$) na kliznom kontaktu bude srazmeran položaju “zatezača”. Upoređivanjem napona $v(t)$ sa referentnim naponom v_{ref} se formira signal greške $e(t)$. Signal $e(t)$ se filtrira, integrira radi eliminacije greške rada u stacionarnom stanju i vodi dalje do amplitudina i generatora. Vidi se da je $e(t)$ srazmerno promeni zategnutosti čelične trake. Blok dijagram sistema, sa odgovarajućim funkcijama prenosa, je prikazan na slici 5.2.



Slika 5.2.

Zadatak je:

- a) formirati GMK sistema za $0 \leq K_a < \infty$;
- b) Odrediti pojačanje K_a , tako da dominantni par polova ima relativni koeficijent prigušenja $\xi = 0.707 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Koliki je u tom slučaju preskok ($IT\%$) i vreme smirenja T_s ?

Napomena: Vremenska konstanta filtera je zanemariva u odnosu na ostatak sistema ($\tau=0$).

a) Funkcija povratnog prenosa sistema je:

$$W(s) = \frac{1}{s} \cdot (2s+1) \cdot \frac{K_a}{s+1} \cdot \frac{1}{s+1} \cdot \frac{0.25}{s(s+1)} = \frac{K}{1 + \frac{0.25}{s(s+1)} s(s+0.5)(s+1)^2}$$

gde je $K = 0.5K_a$.

Pravilo 1. Broj grana GMK je $n=4$;

Pravilo 2. Grane GMK ($n=4$) izvire iz polova funkcije $W(s)$: $p_1=0$, $p_2=-0.5$, $p_{3,4}=-1$.

Pravilo 3. $m=0$ grana GMK završavaju u konačnim nulama, a $n-m=4$ grane odlaze u beskonačnost.

Pravilo 4. Simetrija GMK u odnosu na realnu osu. OK

Pravilo 5. Broj asimptota je 4. Ugao ϕ_k :

$$\phi_k = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}; \quad k=0,1,2,3.$$

$$\phi_0 = \frac{\pi}{4} = 45^\circ; \quad \phi_1 = \frac{3\pi}{4} = 135^\circ; \quad \phi_2 = \frac{5\pi}{4} = -135^\circ; \quad \phi_3 = \frac{7\pi}{4} = -45^\circ.$$

Tačka preseka asimptota σ_a :

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{0-0.5-1-1}{4} = -0.625$$

Pravilo 6. Uglovi pod kojim grane GMK napuštaju polove:

$$\beta_1(p_1=0) = -180^\circ - (0^\circ + 0^\circ + 0^\circ) = -180^\circ;$$

$$\beta_2(p_2=-0.5) = -180^\circ - (180^\circ + 0^\circ + 0^\circ) = -360^\circ = 0^\circ;$$

$\beta_3(p_3=-1) = -180^\circ - (180^\circ + 180^\circ + 90^\circ) = -90^\circ$; (ugao β_4 pod kojim se pol p_3 vidi iz pola p_4 je 90° , kao da su p_3 i p_4 konjugovano kompleksni, odnosno $p_{3,4} = -1 \pm j0$. Ovo će se pokazati kroz pravilo za interval preklapanje grana GMK i realne ose, tačku razdvajanja i ugao izlaska grana GNK iz višestrukih polova.)

$$\beta_4(p_4=-1) = -\beta_3 = 90^\circ;$$

Pravilo 7. Ugao ulaska grana GMK u konačne nule – ne primenjuje se, nema konačnih nula.

Pravilo 8. Interval preklapanja grana GMK i realne ose je $[0, -0.5] \cup \{-1\}$. Odavde se vidi da grane GMK moraju napustiti realnu osu u tački -1 , odnosno da je ugao izlaska grana GMK iz polova $p_{3,4}$ jednak $\pm 90^\circ$.

Pravilo 9. Tačka spajanja – razdvajanja grana GMK i realne ose σ_0 . Za funkciju povratnog prenosa:

$$W(\sigma_0) = \frac{K}{\sigma_0(\sigma_0+0.5)(\sigma_0+1)^2} = \frac{K}{\sigma_0^4 + 2.5\sigma_0^3 + 2\sigma_0^2 + 0.5\sigma_0},$$

se određuje prvi izvod, i izjednačava sa nulom:

$$\frac{dW(\sigma_0)}{d\sigma_0} = -K \frac{4\sigma_0^3 + 7.5\sigma_0^2 + 4\sigma_0 + 0.5}{(\sigma_0^4 + 2.5\sigma_0^3 + 2\sigma_0^2 + 0.5\sigma_0)^2} = 0.$$

Prethodna jednačina se svodi na: $4\sigma_0^3 + 7.5\sigma_0^2 + 4\sigma_0 + 0.5 = 0$, čija su rešenja: $\sigma_{01} = -1$;

$\sigma_{02} = -0.6952$; $\sigma_{03} = -0.1798$. Tačke σ_{01} i σ_{03} su tačke odvajanja, dok σ_{02} ne pripada GMK

(čime se potvrđuje činjenica da sve tačke σ_0 zadovoljavaju jednačinu $\frac{dW(\sigma_0)}{d\sigma_0} = 0$, ali da sva

rešenja nisu tačke razdvajanja/spajanja). Tačka $\sigma_{01} = -1$ je tačka razdvajanja, što je još jedna potvrda za ugao izlaska grana GMK iz polova $p_{3,4}$. Ova poslednja činjenica je mogla biti iskorištena tokom određivanja σ_0 , na sledeći način. Ako se nacrtala lokacija polova

sistema u kompleksnoj ravni, na osnovu pravila o intervalima preklapanja može se videti da će jedna tačka odvajanja biti $\sigma_0 = -1$. To znači da $\sigma_0 = -1$ mora biti jedno rešenje jednačine: $4\sigma_0^3 + 7.5\sigma_0^2 + 4\sigma_0 + 0.5 = 0$, čime se red jednačine smanjuje za jedan, i ostaje da se reši kvadratna jednačina što nije problem (valjda?).

U svim slučajevima neće biti moguće na analitički način odrediti σ_0 , i tada se može koristiti ranije objašnjena približna metoda. Na osnovu prethodno određenih intervala preklapanja i poznatog smera grana GMK uočava se da tačka odvajanja mora da bude locirana na intervalu $[0, -0.5]$ (pored tačke -1). Sada se može odrediti $\max\{K\}$ na datom intervalu i odgovarajuća tačka s se može usvojiti za σ_0 . Pojačanja se sračunavaju prema pravilu 12 za konstrukciju GMK, što je u konkretnom slučaju izraz: $K = s(s+0.5)(s+1)^2$. Za početak se sračunavaju sledeća pojačanja:

s	0	-0.1	-0.2	-0.3	-0.4	-0.5
K	0	0.0324	0.0384	0.0294	0.0144	0

Iz prethodne tabele se vidi da je $\max\{K\}$ na intervalu $[-0.1, -0.3]$. Sada se mogu izračunati i pojačanja u sledećim tačkama:

s	-0.15	-0.25	-0.175	-0.225
K	0.0379	0.0352	0.0387	0.0372

Za tačku odvajanja se može usvojiti $\sigma_0 = -0.175$ (gde je greška u odnosu na tačno rešenje $\approx 2.5\%$). Dovoljno tačno bi bilo i usvojiti $\sigma_0 = -0.2$ (gde je greška u odnosu na tačno rešenje $\approx 11\%$)

Pravilo 10. Ugao polaska grana iz višestrukih realnih polova se određuje prema obrascu:

$\beta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2}$; $k=0, 1$, pošto je pol -1 dvostruk i desno od njega se nalaze dva realna pola.

$$\beta_0 = \frac{\pi}{2} = 90^\circ; \beta_1 = \frac{3\pi}{2} = -90^\circ.$$

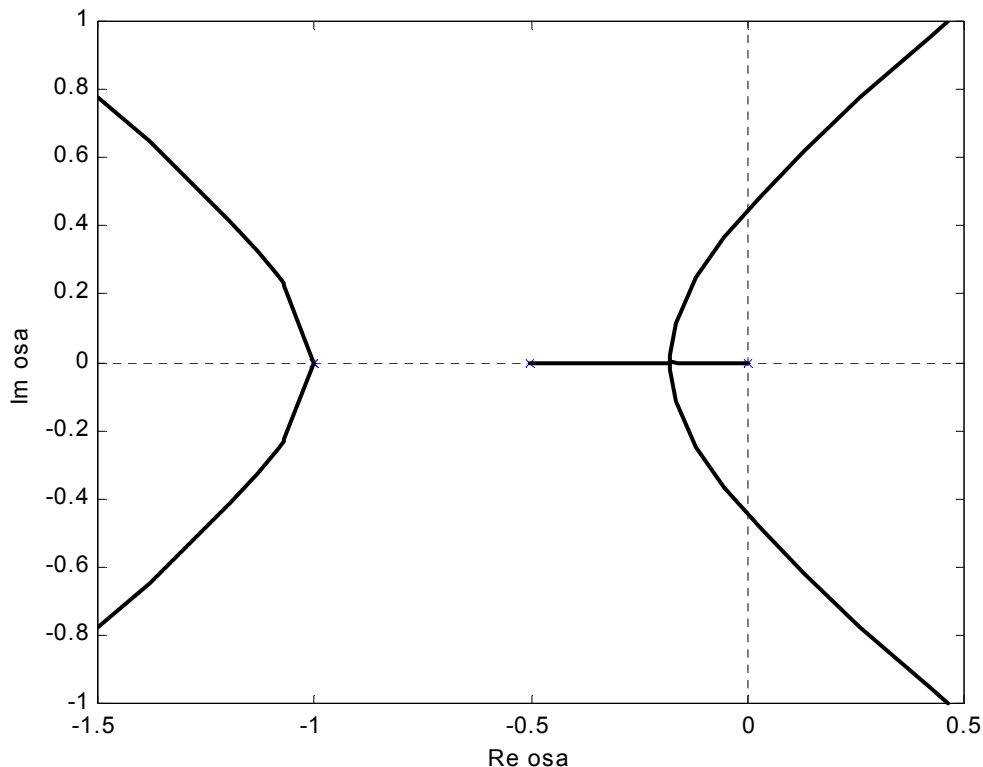
Pravilo 11. Presek grana GMK sa imaginarnom osom. Karakteristični polinom spregnutog prenosa je: $f(s) = s^4 + 2.5s^3 + 2s^2 + 0.5s + K$. Odgovarajuća Routh-ova šema koeficijenata je:

R ₁	s ⁴	1	2	K
R ₂	s ³	2.5	0.5	
R ₃	s ²	1.8	K	
R ₄	s ¹	$\frac{0.9-2.5K}{1.8}$		
R ₅	s ⁰	K		

Na osnovu elemenata Routh-ove kolone se određuje K_{gr} . Jedno rešenje je $K_{gr} = 0$ i ono se odbacuje. Drugo, prihvatljivo, rešenje je $K_{gr} = 0.9/2.5 = 0.36$. Sada je tačka preseka grana

GMK i imaginarne ose: $\omega_{gr} = \sqrt{\frac{a_0}{R_{n-1}}} = \sqrt{\frac{K_{gr}}{R_3}} = \sqrt{\frac{0.36}{1.8}} = 0.447$.

GMK sistema je prikazano na slici 5.3.



Slika 5.3.

b) Potrebno je odrediti dominantne polove prema uslovu $\xi=0.707$ i za njih sračunati pojačanje. Dominantni pol leži na x-polupravoj koja sa pozitivnim smerom ose zaklapa ugao od $\Psi=\arccos(-\xi)=\arccos(-0.707)=135^\circ$. To znači da dominantni pol leži na simetrali drugog kvadranta, te da su njegovi realni i imaginarni delovi jednaki. Par dominantnih polova je $s_{d1,2}=-a\pm ja$, gde je a nepoznati parametar koga je potrebno odrediti. Pošto su $s_{d1,2}$ polovi sistema, oni su koreni karakterističnog polinoma, odnosno karakteristični polinom $f(s)=s^4+2.5s^3+2s^2+0.5s+K$ mora biti deljiv polinomom $A(s)=(s+a-ja)(s+a+ja)=s^2+2as+a^2$ bez ostatka. Ostatak pri deljenju $f(s)$ sa $A(s)$ je: $(5a^2-4a+0.5)s+K-2a^2(2-5a+2a^2)$. Ostatak mora biti jednak nuli, tako da se sada formira sistem od dve jednačine sa dve nepoznate:

$$(5a^2-4a+0.5)=0,$$

$$K-2a^2(2-5a+2a^2)=0.$$

Rešenja prve jednačine su $a_1=0.1551$ i $a_2=0.6449$, od kojih se usvaja prvo, pošto tačka određena parametrom a_2 ne leži na GMK. Dominantni polovi su $s_{d1,2}=-0.1551\pm j0.1551$, i odgovarajuće pojačanje:

$$K=|-0.1551+j0.1551|\cdot|-0.1551+j0.1551+0.5|\cdot|-0.1551+j0.1551+1|^2=0.612$$

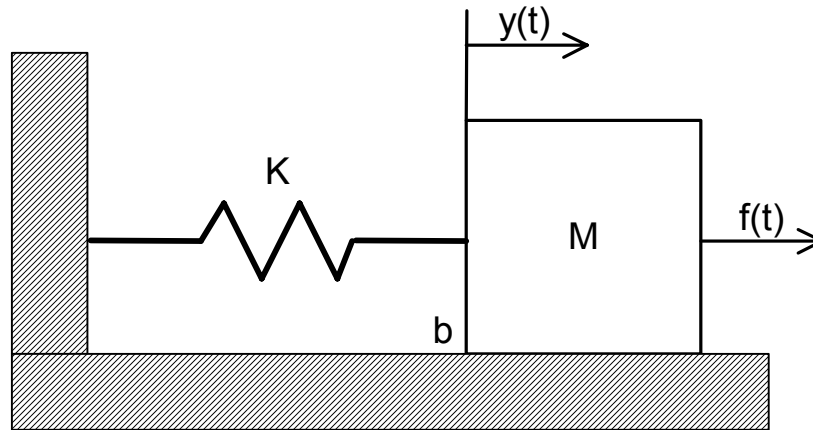
Traženo pojačanje amplitudina je: $K_a=2K=0.1224$.

Drugi par polova sistema za pojačanje $K=0.612$ je $s_{3,4}=-1.1\pm j0.27$, koji su daleko od imaginarne ose i ne utiču puno na karakter odskočnog odziva. Odskočni odziv se može opisati samo dejstvom dominantnih polova, tako da se mogu primeniti karakteristike

sistema drugog reda, odnosno: $\Pi\%=100\cdot e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$, što za $\xi=0.707=\frac{\sqrt{2}}{2}$, daje $\Pi\%=4.3\%$.

Vreme smirenja T_s se računa prema obrascu: $T_s=4T_d=\frac{4}{\text{Re}\{s_{d1}\}}=\frac{4}{0.1551}\approx 26\text{sec}$.

gde je T_d – dominantna vremenska konstanta sistema.

Prilog: Primena Laplasove transformacije

Mehanički sistem sa slike je opisan diferencijalnom jednačinom

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + K y(t) = f(t). \quad (1)$$

Neka je $f(t)=0$; $y(0^-)=y_0=1$ i $\frac{dy}{dt}(0^-)=0$. Primenom Laplasove transformacije na jednačinu (1), a uz uvažavanje prethodno navedenih uslova sledi

$$M(s^2 Y(s) - s y(0^-) - \frac{dy}{dt}(0^-)) + b(s Y(s) - y(0^-)) + K Y(s) = 0, \quad (2)$$

odnosno nakon sređivanja

$$Y(s)[Ms^2 + bs + K] = y(0^-)(Ms + b) \\ Y(s) = \frac{Ms+b}{Ms^2+bs+K} y(0^-) = \frac{Ms+b}{Ms^2+bs+K} = \frac{P(s)}{Q(s)}. \quad (3)$$

Polinom $Q(s)$ se zove **karakteristični polinom** jer njegovi koreni određuju karakter odziva sistema (o čemu će biti reči kasnije). Koreni polinoma $P(s)$ se zovu nule sistema, a koreni polinoma $Q(s)$ polovi, karakteristične ili sopstvene vrednosti sistema.

Neka je $K/M=2$ i $b/M=3$. Sada se izraz (3) može napisati u obliku

$$Y(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}. \quad (4)$$

Razvojem u sumu parcijalnih razlomaka izraz (4) se transformiše u

$$Y(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad (5)$$

Nakon primene ILT na izraz (5) sledi

$$y(t) = 2e^{-t} - e^{-2t}. \quad (6)$$

Provera rešenja se može izvršiti za $t=0$ i $t \rightarrow \infty$. $y(0)=2e^0 - 1e^0 = 1$, i $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = 0$. Rešenje je u redu i prema fizici sistema i prema drugoj graničnoj teoremi.

Ovo je bio prilično jednostavan slučaj, kada su polovi sistema realni i prosti. Šta se dešava kada su polovi sistema konjugovano kompleksni? U tom slučaju se izraz (3) može napisati u obliku

$$Y(s) = \frac{Ms+b}{Ms^2+bs+K} y_0 = \frac{s+2\xi\omega_n}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} y_0, \quad (7)$$

gde je $\xi = \frac{b}{2\sqrt{KM}}$ i $\omega_n = \sqrt{\frac{K}{M}}$. Kada se karakteristični polinom izraza (7) izjednači sa nulom, dobija se **karakteristična jednačina** sistema

$$s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2 = 0. \quad (8)$$

Rešenja karakteristične jednačine sistema (8) su:

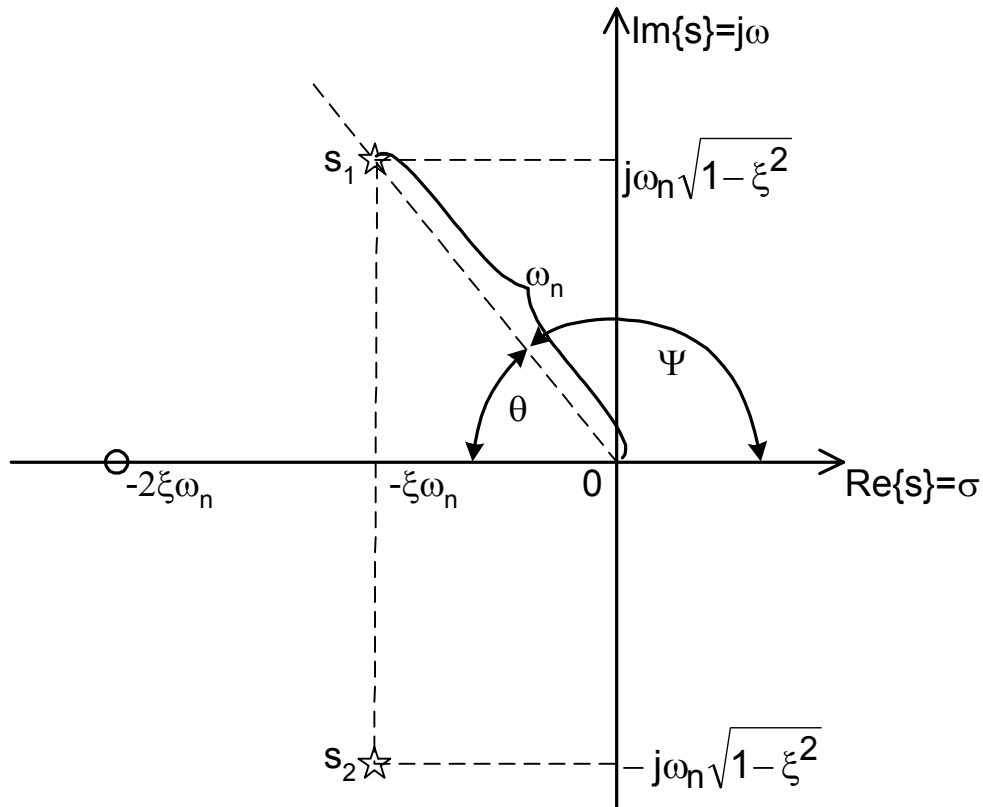
$$s_{1;2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}. \quad (9)$$

Pošto je po pretpostavci sistem takav da su mu polovi konjugovano kompleksni, to je $\xi < 1$ i izraz (9) se piše u obliku

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}. \quad (10)$$

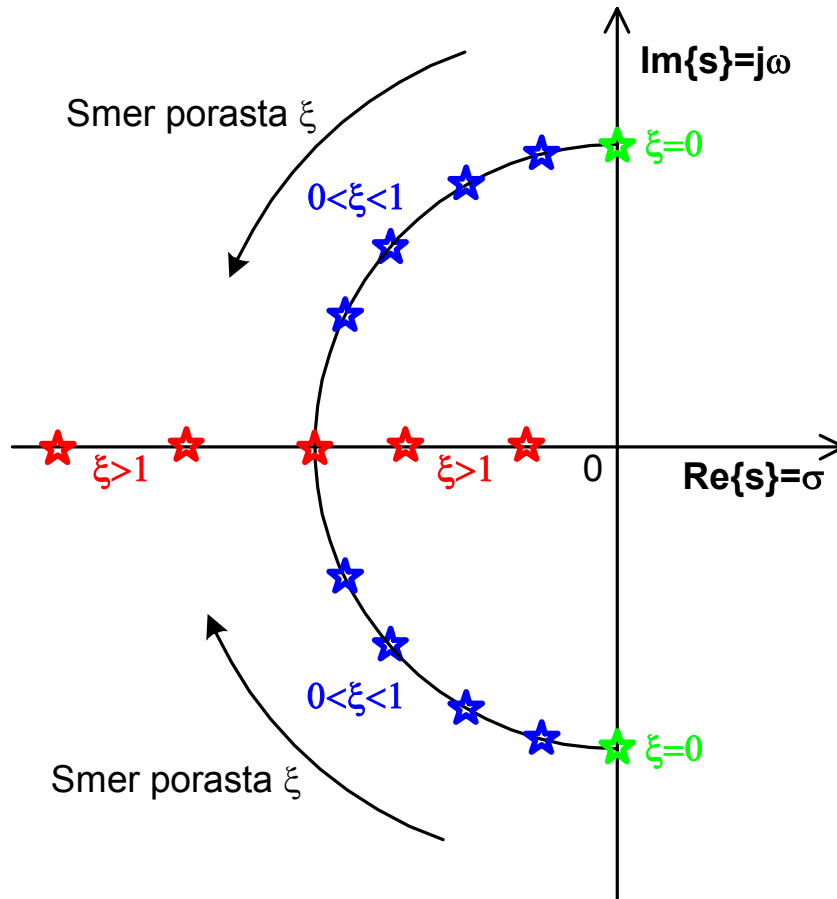
U prethodni izrazima su uvedene veličine ξ - relativni koeficijent prigušenja i ω_n - sopstvena neprigušena (prirodna) učestanost.

Ako se polovi sistema s_1 i s_2 predstave u kompleksnoj s-ravni, dobija se sledeća slika:



Sa slike se vidi da je $\xi = \cos\theta$, ali se češće koristi izraz $\xi = -\cos\Psi$ ($\theta = 180^\circ - \Psi \Rightarrow \cos\theta = \cos(180^\circ - \Psi) = -\cos(\Psi)$). Kompleksna s-ravan služi za grafičko predstavljanje polova i nula sistema u cilju lakšeg sagledavanja karaktera odziva i ponašanja sistema u različitim radnim režimima. Uobičajene oznake je za polove zvezdica, a za nule kružić.

Sa prethodne slike se vidi da je ω_n u stvari udaljenost pola od koordinatnog početka i da je to uvek realan, pozitivan broj. Relativni koeficijent prigušenja ξ je u stvari \cos ugla koji zaklapa vektor povučen iz koordinatnog početka do pola, sa pozitivnim smerom $\text{Re}\{s\}$ ose. Vrednost ω_n se kreće u granicama od 0 do ∞ , dok ξ uzima vrednosti sa intervala $[0, 1]$. Na sledećoj slici je prikazana veza između položaja polova u kompleksnoj ravni i vrednosti ξ .



Obratiti pažnju!!! Posmatra se samo leva poluravan kompleksne s-ravni, a desna ne. Zašto? To će biti objašnjeno kasnije, u okviru analize performansi i stabilnosti sistema.

Rešenja polazne DJ (1) u slučaju konjugovano kompleksnih polova sistema, može se odrediti pomoću jednačine (7), primenom ILT na nju. Pre primene ILT, potrebno je jednačinu (7) transformisati u pogodan oblik.

$$Y(s) = \frac{s + 2\xi\omega_n}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} y_0 = y_0 \left(\frac{s + \xi\omega_n + \xi\omega_n \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-\xi^2})^2} \right). \quad (11)$$

Nakon sređivanja (11) se transformiše u

$$Y(s) = y_0 \left(\frac{s + \xi\omega_n}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-\xi^2})^2} + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \frac{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}{(s + \xi\omega_n)^2 + (\omega_n \sqrt{1-\xi^2})^2} \right). \quad (12)$$

Nakon primene ILT na izraz (12), dobija se

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 \left[e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) \right] = \\ &= \frac{y_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \left[\sqrt{1-\xi^2} \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) + \xi \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Pošto je po definiciji $\xi < 1$, može se napisati $\xi = \cos\theta$ (tada je $\sqrt{1-\xi^2} = \sin\theta$), pa se izraz (13) može napisati u obliku

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \left[\sin\theta \cos(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) + \cos\theta \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t) \right] =$$

$$= \frac{y_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \theta). \quad (14)$$

Konačno je odziv sistema, odnosno, rešenje polazne diferencijalne jednačine (1) u slučaju konjugovano kompleksnih polova dato izrazom (15)

$$y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \arccos\xi). \quad (15)$$

