

Frekventne metode analize sistema automatskog upravljanja

Pored odskočne pobude pri ispitivanju linearnih sistema automatskog upravljanja se često primenjuje i prostoperiodična, odnosno sinusna pobuda. U okviru frekventnih metoda se analizira odziv sistema u stacionarnom stanju na prostoperiodičnu pobudu. U okviru funkcije prenosa SAU $G(s)$, promenljiva s se menja kompleksnom učestanošću $j\omega$, tako da se analizira funkcija prenosa sistema u frekventnom domenu $G(j\omega)$, gde je ω promenljiva učestanost pobudnog signala.

SAU čija je funkcija prenosa $G(s)$ se pobuđuje sinusnim signalom

$u(t) = A_u \sin(\omega t + \phi_u) = A_u e^{j(\omega t + \phi_u)}$. Odziv sistema $Y(s)$ je:

$$Y(s) = G(s)U(s). \quad (1)$$

U vremenskom domenu je odziv $y(t)$, nakon primene konvolucije:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)U(s)\} = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)d\tau = \int_0^t A_u e^{j(\omega(t-\tau)+\phi_u)} g(\tau)d\tau, \quad (2)$$

gde je $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$ jedinični impulsni odziv sistema. Pošto je za $t < \tau$ $h(t-\tau) = 0$,

podintegralna funkcija se može pomnožiti sa $h(t-\tau)$ a granice integrala proširiti, tako da je:

$$y(t) = \int_0^{\infty} A_u e^{j(\omega(t-\tau)+\phi_u)} h(t-\tau)g(\tau)d\tau. \quad (3)$$

Pošto za svaku funkciju (signal) važi $f(t-\tau) = 0$ za $t < \tau$, $y(t)$ se može napisati kao:

$$y(t) = \int_0^{\infty} A_u e^{j(\omega(t-\tau)+\phi_u)} g(\tau)d\tau = A_u e^{j(\omega t + \phi_u)} \int_0^{\infty} e^{-j\omega\tau} g(\tau)d\tau. \quad (4)$$

Pošto je i $g(\tau) = 0$ za $\tau < 0$ granice integrala se mogu proširiti pa je:

$$y(t) = A_u e^{j(\omega t + \phi_u)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} g(\tau)d\tau, \quad (4)$$

gde je:

$$G(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} g(\tau)d\tau, \quad (5)$$

prema definiciji Fourier-ove transformacije $G(j\omega)$ funkcija prenosa sistema u frekventnom domenu. Smenom izraza (5) u (4) sledi:

$$y(t) = A_u e^{j\omega t + \phi_u} G(j\omega). \quad (6)$$

$G(j\omega)$ se, kao i bilo koji drugi kompleksan broj, može predstaviti u eksponencijalnom obliku:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\text{Arg}\{G(j\omega)\}}, \quad (7)$$

gde je:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2\{G(j\omega)\} + \text{Im}^2\{G(j\omega)\}}, \quad (8)$$

$$\text{Arg}\{G(j\omega)\} = \arctg \frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}}. \quad (9)$$

Sada se izraz za odziv $y(t)$ može napisati u obliku:

$$y(t) = A_i e^{j\omega t + \phi_i} \quad (10)$$

Na osnovu izraza (6),(7) i (10) se vidi da je:

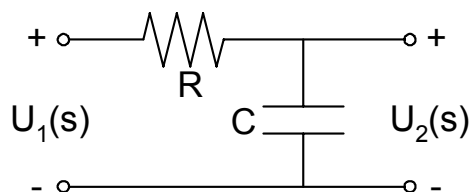
$$\frac{A_i}{A_u} = |G(j\omega)|, \quad (11)$$

$$\phi_i - \phi_u = \text{Arg}\{G(j\omega)\}. \quad (12)$$

Prethodni izrazi pokazuju da linearan sistem pobuđen prostoperiodičnom pobudom, u stacionarnom stanju daje prostoperiodičan odziv iste učestanosti kao pobudni signal, ali sa promenjenom amplitudom i faznim pomerajem. Odnos amplituda ulaznog i izlaznog signala je jednak modulu funkcije prenosa sistema za razmatranu učestanost ω , a fazni pomeraj izlaznog u odnosu na ulazni signal je jednak argumentu funkcije prenosa za razmatranu učestanost ω . Za različite ω će pojačanje i fazni pomeraj signala pri prolasku kroz sistem biti različito, odnosno za različite ω će vrednosti $|G(j\omega)|$ i $\text{Arg}\{G(j\omega)\}$ biti različite. Promena $G(j\omega)$ pri promeni ω od $-\infty$ do ∞ se može predstaviti grafički, i ta kriva se naziva *amplitudno fazna frekventna karakteristika* (ili samo *frekventna karakteristika*, *AFFK*) sistema*. Frekventna karakteristika sistema se crta u kompleksnoj ravni promenljive $G(j\omega)$. Jedan način je da se za nekoliko vrednosti ω na intervalu $[0, \infty)$ sračuna vrednost Re i Im dela $G(j\omega)$ ili $|G(j\omega)|$ i $\text{Arg}\{G(j\omega)\}$, te tačke se unesu u koordinatni sistem na čijoj se apscisi nanosi vrednost za $\text{Re}\{G(j\omega)\}$ a na ordinati za $\text{Im}\{G(j\omega)\}$, tačke se spoje, kriva se orijentiše u smeru porasta frekvencije ω i dobija se tražena frekventna karakteristika. Ovaj način se retko primenjuje jer je nepraktičan (potrebno je sračunavanje vrednosti kompleksne funkcije u većem broju tačaka) i postoji realna šansa da se neke važne (karakteristične) tačke izostave (kao što su preseki sa Re i Im osom), a upotrebna vrednost precizno nacrtanog dijagrama nije značajno veća od približne skice. Iz navedenih razloga se najčešće AFFK sistema samo skicira i to na taj način da se odrede početak i kraj krive ($G(j\omega)$ za $\omega=0$ i $\omega \rightarrow \infty$) i tačke preseka krive sa Re i Im osom, spajanjem dobijenih tačaka u smeru porasta frekvencije ω , dobija se skica AFFK koja nosi dovoljnu količinu informacija za njenu najčešću primenu, a to je analiza stabilnosti sistema. Valja napomenuti, šta u stvari AFFK predstavlja fizički? Svaka tačka na AFFK odgovara tačno jednoj frekvenciji ω sa intervala $[0, \infty)$. Udaljenost te tačke od koordinatnog početka jeste $|G(j\omega)|$, to jest odnos amplituda izlaznog i ulaznog signala. Ugao koji zaklapa vektor povučen iz koordinatnog početka u tu tačku sa pozitivnim smerom Re ose jeste $\text{Arg}\{G(j\omega)\}$, to jest fazni pomeraj izlaznog u odnosu na ulazni signal. Teoretski, sa AFFK je moguće za proizvoljnu frekvenciju ω_x očitati kolika će biti promena amplitude i fazni pomeraj (kašnjenje) tog signala pri prolasku kroz razmatrani sistem. Praktično, veoma je teško (ako ne i nemoguće) očitati navedene podatke sa AFFK jer se za veće vrednosti frekvencije tačke zgušnjavaju, a osim toga, frekvencija ω se pojavljuje kao parametar AFFK i teško je na crtežu fiksirati tačku koja odgovara tačno određenoj frekvenciji ω_x . Za očitavanje navedenih podataka praktično se koriste mnogo podesniji *Bodeovi dijagrami*, o kojima će kasnije biti reči.

* Formalno bi bilo ispravno da se posmatraju frekvencije $-\infty < \omega < \infty$, ali će se u daljem razmatranju posmatrati samo frekvencije $0 \leq \omega < \infty$. Za to postoje sledeći razlozi: za negativne frekvencije se dobija kriva koja je simetrična u odnosu na realnu osu sa krivom za pozitivne frekvencije; ta kriva ne sadrži nikakvu novu informaciju pa je samim tim nepotrebna; nema fizičkog smisla definisanje negativnih frekvencija (osim ako se eksplicitno ne radi i smerovima obrtanja).

Primer 1: Formirati frekventnu karakteristiku RC filtera prikazanog na slici 1.1.



Slika 1.1

Rešenje: Funkcija prenosa filtera je:

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{RCs+1}, \quad (1.1)$$

odnosno u frekventnom domenu je:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC+1} = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_1}+1}, \quad (1.2)$$

gde je $\omega_1 = \frac{1}{RC}$. Nakon racionalizacije, izraz (1.2) postaje:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} - j \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}, \quad (1.3)$$

odakle je:

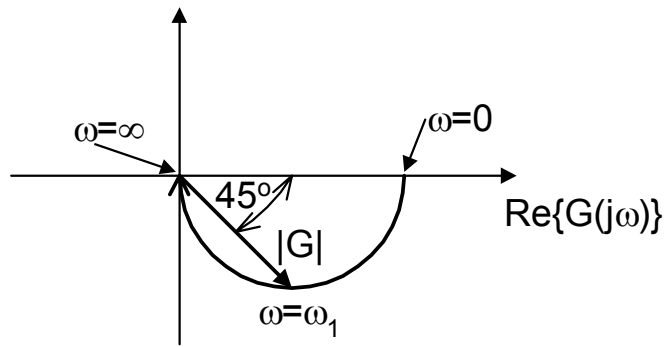
$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}, \quad (1.4)$$

$$\text{Arg}\{G(j\omega)\} = -\text{arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right). \quad (1.5)$$

Sada je moguće u nekoliko tačaka sračunati vrednosti $G(j\omega)$, što je prikazano sledećom tabelom:

ω	$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	$ G(j\omega) $	$\text{Arg}\{G(j\omega)\}$
0	1	0	1	0
$0.1\omega_1$	0.99	0.1	0.995	-5.7°
$0.5\omega_1$	0.8	0.5	0.894	-26.6°
ω_1	0.5	0.5	0.707	45°
$10\omega_1$	$1 \cdot 10^{-2}$	0.1	0.1	-84.3°
$100\omega_1$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-2}$	0.01	-89.4°
∞	0	0	0	-90°

Na osnovu podataka iz tabele se može skicirati AFFK filtera, i ona je prikazana na slici 1.2.



Slika 1.2

Primer 2. Skicirati AFFK sistema opisanog funkcijom prenosa $G(s) = \frac{K}{s(sT+1)}$, gde su K i T realni, pozitivni parametri.

Rešenje: Smenom $s=j\omega$ se prelazi u frekventni domen, gde je funkcija prenosa:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega T+1)} = \frac{K}{j\omega - \omega^2 T} = -\frac{K\omega^2 T}{\omega^2 + \omega^4 T^2} - j\frac{K\omega}{\omega^2 + \omega^4 T^2}. \quad (2.1)$$

Moduo i argument funkcije $G(j\omega)$ su:

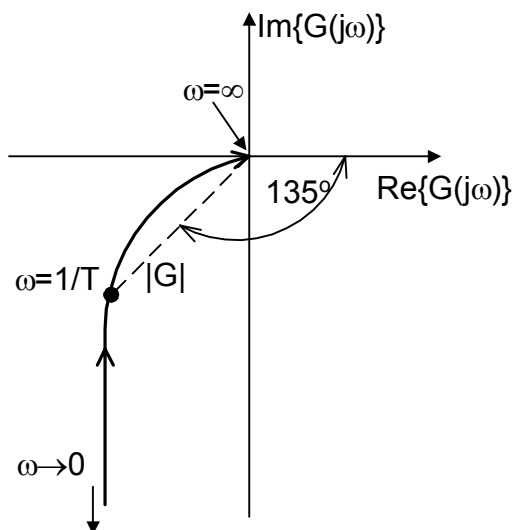
$$|G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 + \omega^4 T^2}}, \quad (2.2)$$

$$\phi(\omega) = \text{Arg}\{G(j\omega)\} = -\text{arctg}\left(\frac{1}{-\omega T}\right). \quad (2.3)$$

Na osnovu izraza (2.1) do (2.3) može se formirati tabela 2.1, a na osnovu podataka iz tabele skicira se tražena AFFK (slika 2.1):

ω	$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	$ G(j\omega) $	$\text{Arg}\{G(j\omega)\}$
0	$-KT$	∞	∞	-90°
$\frac{1}{2T}$	$-\frac{4KT}{5}$	$-\frac{8KT}{5}$	$\frac{4KT}{\sqrt{5}}$	-117°
$\frac{1}{T}$	$-\frac{KT}{2}$	$-\frac{KT}{2}$	$\frac{KT}{\sqrt{2}}$	-135°
∞	0	0	0	-180°

Tabela 2.1



Slika 2.1

Način formiranja AFFK može biti različit, ali dobijena kriva je jedinstvena za jedan sistem. Ograničenja ovako formirane AFFK su očigledna. Pri ubacivanju u sistem novih elemenata moraju se ponovo preračunati vrednosti iz tabele zbog uticaja novo dodatih nula i polova, što je zamoran posao. Dalje, na slici se vidi ukupan uticaj svih polova i nula sistema a ne pojedinačan, što je nepovoljna činjenica jer nisu svi polovi i nule u sistemu podjednako važni i uticajni (setite se priče o dominantnim polovima). Iz tog razloga dobro bi bilo frekventnu karakteristiku sistema predstaviti na drugačiji način.

Prvo se razdvajaju amplitudna i fazna frekventna karakteristika, odnosno na jednom dijagramu se crta zavisnost $|G(j\omega)|$ od promenljive frekvencije ω , a na drugom zavisnost $Arg\{G(j\omega)\}$ od ω . Na taj način se dobijaju dva dijagrama sa kojih se direktno očitava vrednost modula i faze funkcije prenosa sistema za određenu frekvenciju ω . Drugo, radi proširenja intervala frekvencija koje se razmatraju uvodi se logaritamska podela na apscisi, tako da se umesto ω , a osi nezavisno promenljive prikazuje $\log_{10}\omega$. Na taj način je moguće prikazati opseg od vrlo niskih ($10^{-5}rad/sec$) do vrlo visokih ($10^5rad/sec$) učestanosti bez gubitka preciznosti crteža. Treće, radi dobijanja deo po deo linearne amplitudne karakteristike pogodno je i amplitudnu karakteristiku $|G(j\omega)|$ predstaviti pomoću logaritma osnove 10 (kao što je usvojeno predstavljanje ω preko njenog logaritma), tako da se sada $|G(j\omega)|$ izražava u decibelima (db) i prema definiciji je:

$$|G(j\omega)|_{db} = 20 \log_{10}|G(j\omega)|. \quad (13)$$

Ako se frekventna karakteristika sistema formira na gore objašnjen način dobijaju se dva grafikona koji se nazivaju **Bodeovi dijagrami**. Njihov praktični značaj i primenljivost je veoma velika, a način formiranja se vidi iz sledećeg primera.

Primer 3. Formirati Bodeove dijagrame za RC filter iz primera 1.

Rešenje: Funkcija prenosa sistema, u frekventnom domenu, je:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{j\omega T + 1}, \quad (3.1)$$

gde je $T=RC$ (vremenska konstanta sistema). Moduo i argument $G(j\omega)$ su:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \quad (3.2)$$

$$Arg\{G(j\omega)\} = - \arctg(\omega T). \quad (3.3)$$

Ako se $|G(j\omega)|$ izrazi u decibelima, izraz (3.2) postaje:

$$|G(j\omega)|_{db} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} = - 10 \log (1 + (\omega T)^2). \quad (3.4)$$

Iz izraza (3.4) se vidi da je za male frekvencije $\omega \ll 1/T$ ($\omega T \ll 1$):

$$|G(j\omega)|_{db} = -10 \log 1 = 0db; \quad \omega \ll 1/T, \quad (3.5)$$

odnosno da je za velike frekvencije $\omega \gg 1/T$ ($\omega T \gg 1$):

$$|G(j\omega)|_{db} = -20 \log \omega T; \quad \omega \gg 1/T, \quad (3.6)$$

a da je za $\omega = 1/T$ ($\omega T = 1$):

$$|G(j\omega)|_{db} = -10 \log 2 = -3.01db; \quad \omega = 1/T. \quad (3.7)$$

Amplitudna (3.4) i fazna (3.3) karakteristika si predstavljene Bodeovim dijagramom na slici 3.1. Daljim posmatranjem izraza (3.4) do (3.6) mogu se uvesti sledeće pretpostavke:

- neka je za svako $\omega < 1/T$ ispunjen uslov da je $\omega \ll 1/T$, odnosno da je $|G(j\omega)|_{db} = 0db$;
- neka je za svako $\omega > 1/T$ ispunjen uslov da je $\omega \gg 1/T$, odnosno da je $|G(j\omega)|_{db} = -20 \log \omega T db$.

Uz uvažavanje prethodnih pretpostavki, i uz činjenicu da je na apscisi logaritamska podela ($\log_{10}\omega$) vidi se da kompletna amplitudna karakteristika može biti aproksimirana sa dva linearna segmenta. Jednim horizontalnim, koji ima vrednost 0db i odgovara frekvencijama $0 \leq \omega \leq 1/T$, i drugim kosim, vrednosti $-20\log\omega T$, koji odgovara frekvencijama $1/T \leq \omega < \infty$. Presek ova dva segmenta se nalazi u tački koja odgovara frekvenciji $\omega=1/T$, i ta se frekvencija naziva prelomna ili ugaona učestanost. Ako se amplitudna karakteristika zameni aproksimacijom na gore navedeni način dobija se asimptotska amplitudna karakteristika koja se češće koristi, ali je i manje precizna (greška u prelomnoj učestanosti je, prema prethodnoj analizi oko 3db). Asimptotska karakteristika je prikazana zajedno sa realnom logaritamskom na amplitudnom dijagramu (slika 3.1).

Koliki je nagib "kosog" dela asimptotske amplitudne karakteristike? Posmatra se $|G(j\omega)|_{\text{db}}$ na frekvencijama ω_1 i ω_2 , koje su veće od $1/T$. Može se napisati:

$$|G(j\omega_1)|_{\text{db}} - |G(j\omega_2)|_{\text{db}} = -20\log(\omega_1 T) - (-20\log(\omega_2 T)) = -20\log \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (3.8)$$

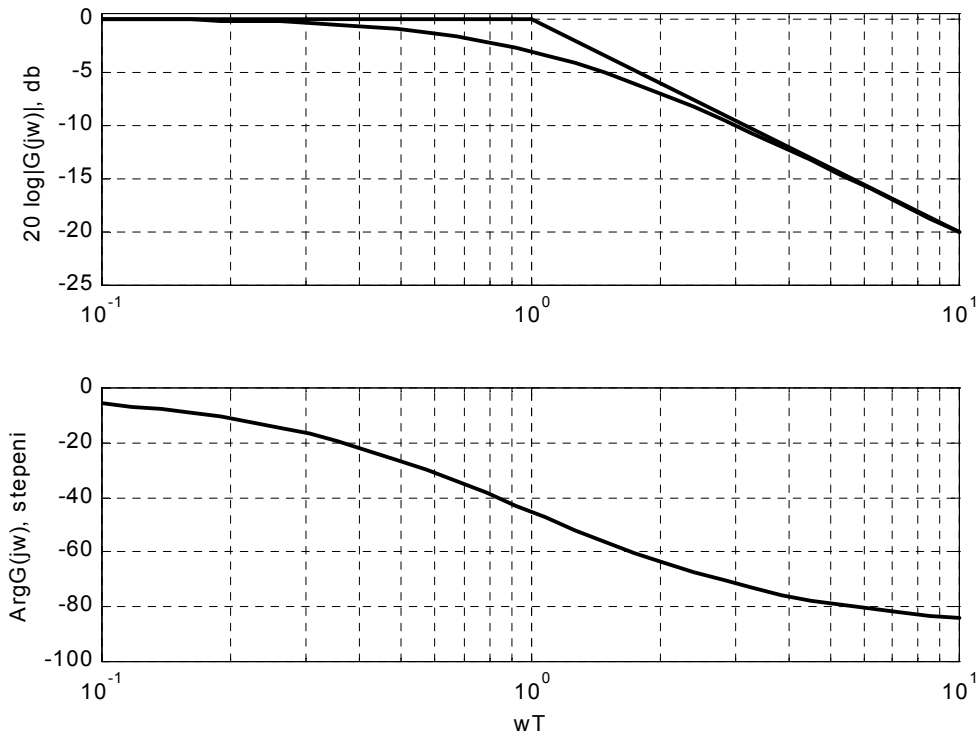
Ako je frekvencija ω_1 deset puta veća od ω_2 ($\omega_2=10\omega_1$) one tada čine dekadu, a iz izraza (3.8) sledi:

$$|G(j\omega_1)|_{\text{db}} - |G(j\omega_2)|_{\text{db}} = -20\log \frac{1}{10} = 20\text{db}, \quad (3.9)$$

odnosno, ako frekvencija ω poraste deset puta, amplitudna karakteristika opadne za 20db , pa je nagib tog dela karakteristika -20db/dekadi . U literaturi se susreće još i pojam oktave. Oktavu čine frekvencije koje se nalaze na intervalu između ω_1 i ω_2 , gde je $\omega_2=2\omega_1$. Ako se u izraz (3.8) unesu granične vrednosti oktave dobija se:

$$|G(j\omega_1)|_{\text{db}} - |G(j\omega_2)|_{\text{db}} = -20\log \frac{1}{2} = 6.02\text{db}, \quad (3.10)$$

pa je nagib kosog dela karakteristike je približno -6db/oktavi . Naravno, vidi se da je nagib -20db/dekadi isto što i -6db/oktavi .



Slika 3.1

Osnovna prednost logaritamskih dijagrama je to, što se multiplikativni elementi, kao što je npr $(1+j\omega t)$ pretvaraju u aditivne tipa $20\log|1+j\omega t|$. Drugim rečima, množenje se pretvara u sabiranje što olakšava formiranje karakteristika i analizu sistema. Ovo se može ilustrovati sledećim primerom. Posmatra se funkcija prenosa sistema:

$$G(j\omega) = \frac{K_b \prod_{i=1}^Q (1+j\omega T_i)}{(j\omega)^N \prod_{m=1}^M (1+j\omega T_m) \prod_{k=1}^R \left[\left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}} \right)^2 + j \frac{2\xi_k}{\omega_{nk}} \omega + 1 \right]}, \quad (14)$$

koja sadrži Q nula, N polova u koordinatnom početku, M polova na realnoj osi i R parova konjugovano kompleksnih polova. Izraz za logaritamsku amplitudnu karakteristiku je:

$$20\log|G(j\omega)| = |G(j\omega)|_{db} = 20\log K_b + 20 \sum_{i=1}^Q \log|1+j\omega T_i| - 20\log|(j\omega)^N| - 20 \sum_{m=1}^M \log|1+j\omega T_m| - 20 \sum_{k=1}^R \log \left| 1 + \left(\frac{2\xi_k}{\omega_{nk}} \right) j\omega + \left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}} \right)^2 \right|, \quad (15)$$

tako da se Bodeov dijagram može formirati jednostavno dodavanjem jednog po jednog elementa na crtež.

Izraz za formiranje fazne karakteristike glasi

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^Q \arctg(\omega T_i) - N \cdot 90^\circ - \sum_{m=1}^M \arctg(\omega T_m) - \sum_{k=1}^R \arctg \left(\frac{2\xi_k \omega_{nk} \omega}{\omega_{nk}^2 - \omega^2} \right), \quad (16)$$

tako da se i fazna karakteristika jednostavno formira dodavanjem fazne karakteristike svakog pojedinačnog elementa na crtež.

Na osnovu izraza (14)-(16) se vidi da se u okviru funkcije prenosa sistema mogu pojaviti četiri različita elementa:

1. Konstantno pojačanje ($\pm K_b$);
2. Pol (ili nula) u koordinatnom početku ($j\omega$);
3. Pol (ili nula) na realnoj osi ($1+j\omega T$);
4. Par konjugovano kompleksnih polova (ili nula) $\left[1 + j \frac{2\xi}{\omega_n} \omega + \left(j \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right]$.

Za svaki od navedenih elemenata će biti nacrtani karakteristični logaritamski amplitudni i fazni dijagrami.

Očitavanje konstanti greške sa Bodeovih dijagrama.

Prema definiciji, konstante greške su

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} W(s)$$

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s)$$

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2W(s)$$

Ako se kompleksna promenljiva s zameni frekvencijom ω , vidi se da će za određivanje konstante greške biti potrebno posmatrati Bodeove dijagrame na jako niskim učestanostima $\omega \rightarrow 0$. Ove niske učestanosti odgovaraju početnom segmentima Bodeovih dijagrama. Pošto je funkcija prenosa sistema pripremljena za crtanje Bodeovih dijagrama normalizovana za nju važi

$$K_p = \lim_{\omega \rightarrow 0} W(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} K \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = K; \text{ ako je red astatizma } r=0;$$

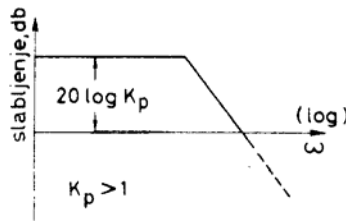
$$K_v = \lim_{\omega \rightarrow 0} j\omega W(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} K \frac{P(j\omega)}{j\omega Q(j\omega)} = K; \text{ ako je red astatizma } r=1;$$

$$K_a = \lim_{\omega \rightarrow 0} (j\omega)^2 W(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} K \frac{P(j\omega)}{(j\omega)^2 Q(j\omega)} = K; \text{ ako je red astatizma } r=2.$$

Iz prethodnog izlaganja se vidi da je konstanta greške uvek jednaka Bodeovom pojačanju normalizovane funkcije prenosa sistema u frekventnom domenu. Sada se postavlja pitanje kako se ova vrednost očitava sa dijagrama? Prvo se nacrtaj dijagram i odredi red astatizma sistema. Na osnovu početnog segmenta dijagrama se očitava vrednost konstante greške, na sledeći način.

1. Konstanta položaja K_p

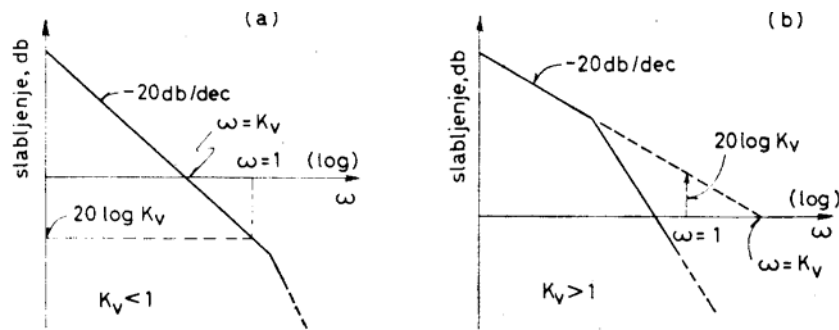
Početni segment amplitudne karakteristike sistema bez astatizma ($r=0$) je $20\log K$, i to je upravo vrednost K_p izražena u decibelima (slika 12).



Slika 12

2. Brzinska konstanta Kv

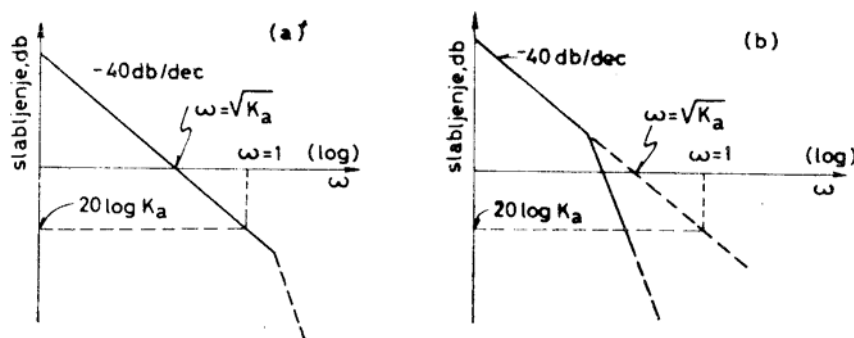
Početni segment amplitudne karakteristike sistema sa astatizmom prvog reda ($r=1$) je $20\log K - 20\log \omega$. Rešavanjem jednačine $20\log K - 20\log \omega = 0$ se dobija da je $K = \omega$. To znači da je brzinska konstanta jednaka vrednosti frekvencije ω za koju početni segment Bodeovog amplitudnog dijagrama seče apscisu. Sa dijagrama se ova vrednost očitava tako da se prvi segment karakteristike produži do preseka sa ω -osom i očitava se vrednost presečne tačke, kako je prikazano na slici 13.



Slika 13

2. Konstanta ubrzanja Ka

Početni segment amplitudne karakteristike sistema sa astatizmom drugog reda ($r=2$) je $20\log K - 40\log \omega$. Rešavanjem jednačine $20\log K - 40\log \omega = 0$ se dobija da je $K = \omega^2$. To znači da je brzinska konstanta jednaka kvadratu vrednosti frekvencije ω za koju početni segment Bodeovog amplitudnog dijagrama seče apscisu. Sa dijagrama se ova vrednost očitava tako da se prvi segment karakteristike produži do preseka sa ω -osom, očitava se vrednost presečne tačke i izračuna vrednost njenog kvadrata, kako je prikazano na slici 14.



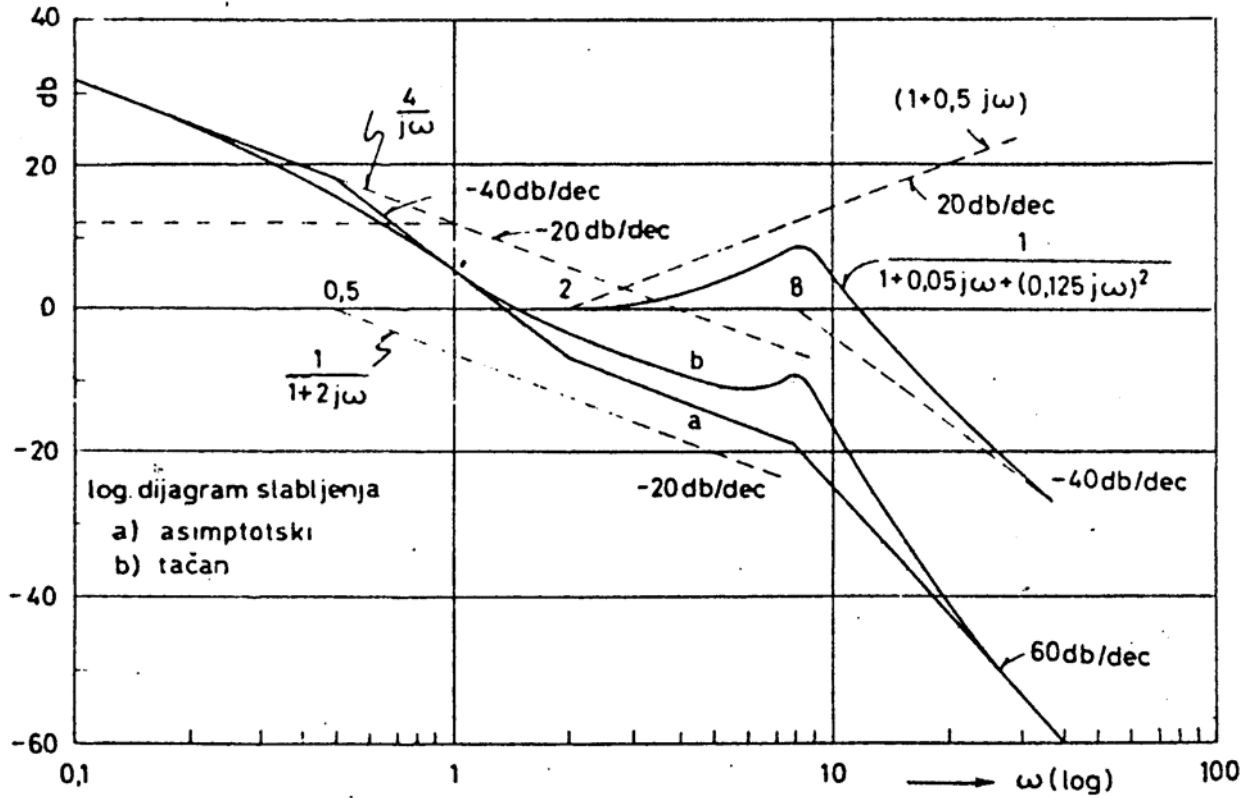
Slika 14

Primer 5. Posmatra se frekventna funkcija prenosa

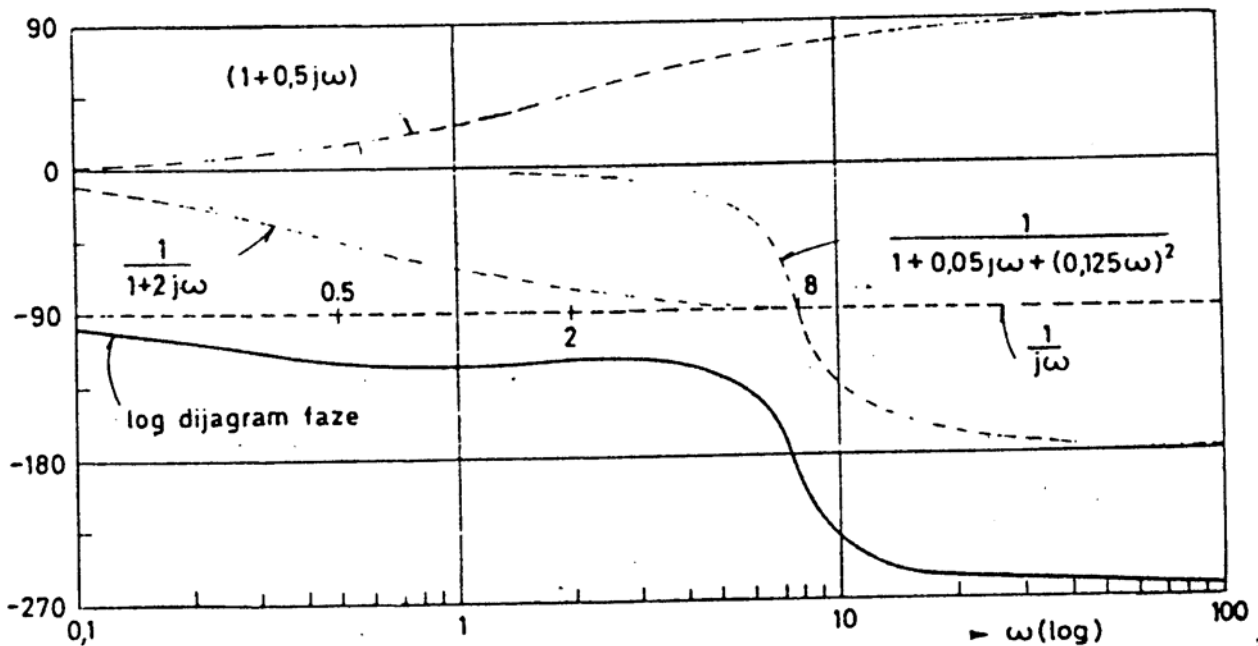
$$W(j\omega) = \frac{4(1+0.5j\omega)}{j\omega(1+2j\omega)[(0.125j\omega)^2+(0.05j\omega)+1]} = \frac{4\left(1+\frac{j\omega}{2}\right)}{j\omega\left(1+\frac{j\omega}{0.5}\right)\left[\left(\frac{j\omega}{8}\right)^2+\left(\frac{j\omega}{20}\right)+1\right]}$$

Konstruisati asimptotsku amplitudnu i faznu logaritamsku karakteristiku.

Rešenje.



Sl. 8.7. Log dijagrami slabljenja funkcije (8.41)



Primer 6. funkcija prenosa

$$W(j\omega) = \frac{10 (1+j\omega)}{(j\omega)^2 \left[\left(\frac{j\omega}{4}\right)^2 + \left(\frac{j\omega}{4}\right) + 1 \right]}$$

Konstruisati asimptotske logaritamske karakteristike amplitude i faze.

Rešenje.

$$|W(j\omega)|_{\text{db}} = 20\log 10 + 20\log |1+j\omega| - 20\log |(j\omega)^2| - 20\log \left| 1 - \left(\frac{\omega}{4}\right)^2 + \left(\frac{j\omega}{4}\right) \right|$$

$$\text{Arg}\{W(j\omega)\} = \arctg(\omega) - 2 \cdot 90^\circ - \arctg \left(\frac{\frac{\omega}{4}}{1 - \left(\frac{\omega}{4}\right)^2} \right)$$

Na slici 6.1 se nalaze asimptotske logaritamske karakteristike amplitude svakog elementa ponaosob. Na slici 6.2 se nalazi asimptotska logaritamska karakteristika amplitude celog sistema, dobijena superpozicijom karakteristika sa slike 6.1. Na slici 6.3 se nalaze asimptotske logaritamske karakteristike faze svakog elementa ponaosob. Na slici 6.4 se nalazi asimptotska logaritamska karakteristika faze celog sistema, dobijena superpozicijom karakteristika sa slike 6.3.