

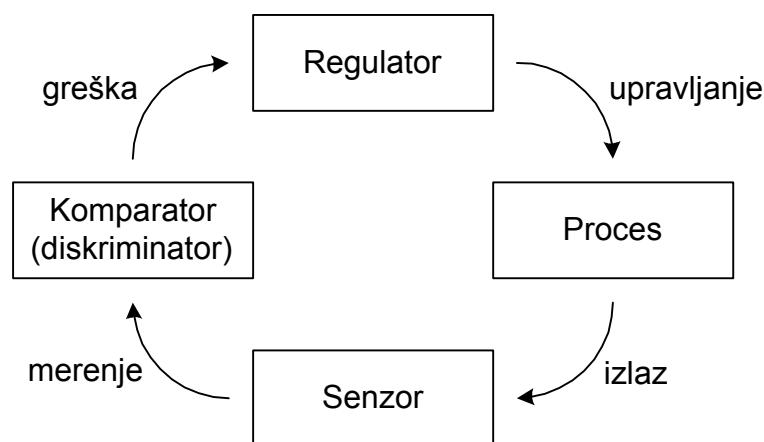
## Karakteristike sistema automatskog upravljanja

Do sada je glavna tema bila matematičko modelovanje fizičkih sistema. Sada je potrebno ideju modelovanja, odnosno modele, proširiti i uključiti (obuhvatiti) karakteristike sistema automatskog upravljanja u prelaznom režimu i stacionarnom stanju. Neke od tih karakteristika su: greške rada u stacionarnom stanju, osetljivost na promene parametara (nesigurnost modela), karakteristike prelaznog režima u zavisnosti od ulaznog signala, reagovanje na poremećaje (sposobnost da se njihovo dejstvo eliminiše) itd.

Veliku pažnju je potrebno posvetiti ulozi signala greške u sistemu (veoma važno!!!). Ovaj signal se koristi za upravljanje sistemom (procesom) i paralelno sa njim se uvodi i pojam povratne sprege. Uopšteno posmatrajući, cilj upravljanja jeste minimizacija (i ako je moguće eliminacija) signala greške.

### Sistemi automatskog upravljanja sa otvorenom i zatvorenom povratnom povratnom spregom (sa i bez povratne sprege)

SAU je definisan kao skup međusobno povezanih (interaktivnih) elemenata koji obezbeđuju da se postigne željeni odziv (izlaz) sistema. Pošto je željeni odziv sistema poznat, moguće je generisati signal proporcionalan razlici između stvarnog i željenog odziva sistema, odnosno signal proporcionalan grešci rada sistema. Upotreba ovog signala u upravljanju procesom rezultuje zatvaranjem kruga operacija i formiranjem sistema koji se naziva sistem sa (zatvorenom) povratnom spregom (slika 1).



Slika 1. Sistem sa povratnom spregom

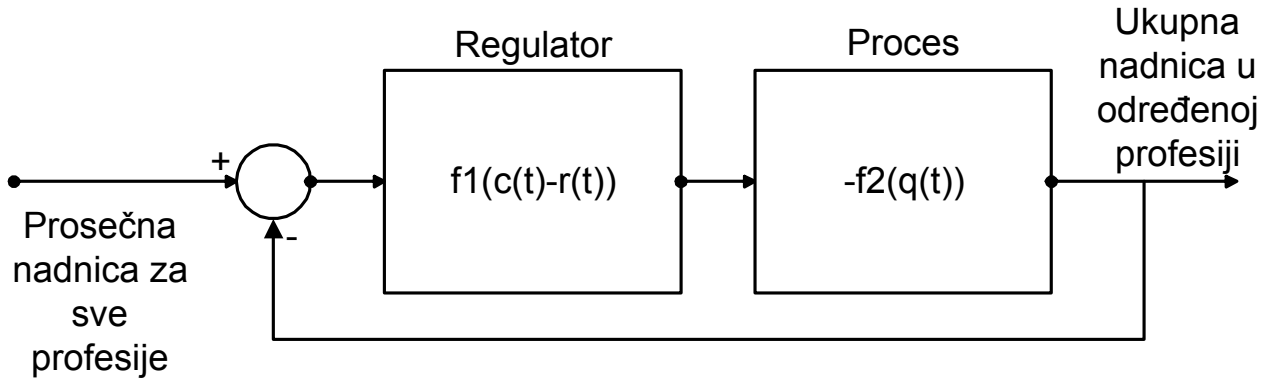
Uvođenje povratne sprege u cilju poboljšanja sistema automatskog upravljanja često je neophodno i to ne samo u tehničkim sistemima. Povratna sprega postoji i u biološkim, fiziološkim, ekonomskim i drugim tipovima sistema, gde čini nerazdvojni deo celine. Sledeći primer ilustruje postojanje povratne sprege u ekonomsko-socijalnim sistemima.

**Primer 1:** Adam Smit (1723-1790) je razmatrao slobodno nadmetanje na tržištu između učesnika u privredi. Smit je upotrebio društvenu (socijalnu) povratnu spregu za objašnjenje svoje teorije, i primetio da (1) svi raspoloživi radnici upoređuju ponuđene poslove i biraju onaj sa najvećom nadnicom, i (2) u svakoj profesiji nadnice opadaju ako se broj radnika koji konkurišu za posao povećava. Neka je  $r$  prosečna nadnica za sve profesije,  $c$  ukupna nadnica za jednu, određenu profesiju i  $q$  priliv radnika u jednu, određenu profesiju. Uočiti povratnu spregu u sistemu i skicirati odgovarajući blok dijagram.

Rešenje:

Ako je nadnica u nekoj profesiji veća od prosečne za sve profesije, tada je priliv radnika pozitivan (više ih konkuriše za ta radna mesta), tako da je:  $q(t)=f_1(c(t)-r(t))$ . Ako postoji povećani priliv radnika u neku profesiju, tada nadnice u toj profesiji opadaju, tako da je:  $c(t)=-f_2(q(t))$ .

Blok dijagram je:

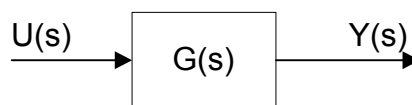


Slika 1.1.



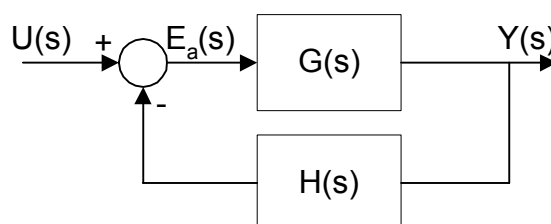
Da bi se pokazale osobine i prednosti sistema sa povratnom spregom posmatrač se jednostavan sistem sa jednostrukom povratnom spregom, iako veliki broj fizičkih sistema poseduje više od jedne povratne sprege. Temeljno proučavanje i dobro razumevanje prednosti povratne sprege se najbolje i najočiglednije može izvesti na sistemima sa jednom povratnom spregom, što se kasnije jednostavno proširuje na sisteme sa višestrukim povratnim spregama.

Sistem bez povratne sprege se često zove direktan sistem ili sistem sa otvorenom petljom (slika 2). Ovaj sistem se definiše na sledeći način: sistem otvorene petlje (direktan sistem) funkcioniše bez povratne sprege (upoređivanja željenog sa stvarnim odzivom) i direktno generiše izlazni signal kao odziv na ulazni. Primeri ovakvih sistema su: prženje hleba u tosteru, pranje veša u veš mašini, regulacija saobraćaja semaforom i sl.



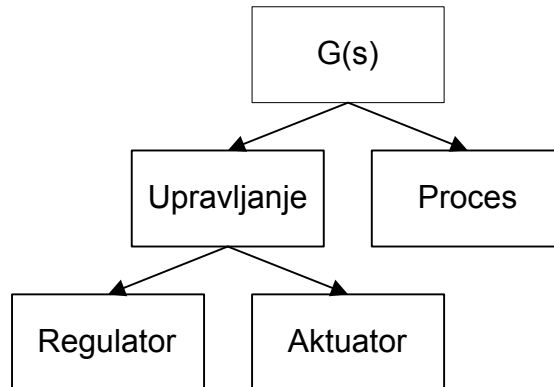
Slika 2. Sistem bez povratne sprege

Za razliku od prethodnog, sistem sa zatvorenim petljom, odnosno sistem automatskog upravljanja sa negativnom povratnom spregom je prikazan na slici 3, i definisan na sledeći način: sistem sa zatvorenim petljom koristi merenje izlaznog signala i upoređivanje sa njegovom željenom vrednošću u cilju generisanja signala greške, koji se dalje prosleđuje do regulatora (aktuatora).



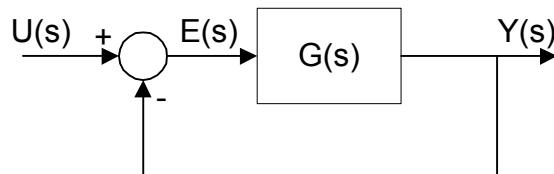
Slika 3. Sistem sa povratnom spregom

Na slici 3 se uočavaju dva bloka, čije su funkcije prenosa  $G(s)$  i  $H(s)$ .  $G(s)$  generalno predstavlja proces, a  $H(s)$  senzor povratne sprege. Blok  $G(s)$  bi se još mogao raščlaniti na *upravljajući deo* (regulator) i sam *proces* (objekat upravljanja), dok bi se regulator mogao podeliti na sam *regulator* (upravljajući, "inteligentni" deo) i *aktuator* (pokretački, energetski) deo, što je prikazano na slici 4.



Slika 4.

Funkcija prenosa bloka  $H(s)$  (slika 3) u velikom broju slučajeva ima vrednost  $H(s)=1$  ili  $H(s)=const. \neq 1$ . Ta "konstanta" fizički vrši pretvaranje veličina (na primer tahometar vrši pretvaranje brzine [rad/sec] u napon [V]). Za početak će se razmatrati sistem sa jediničnom povratnom spregom  $H(s)=1$ , (slika 5) i tada je  $E_a(s)=E(s)$ .



Slika 5.

Na osnovu blok dijagrama sa slike 5, može se napisati:

$$Y(s) = E(s)G(s) = G(s)[U(s) - Y(s)]. \quad (1)$$

Rešavajući jednačinu (1) po  $Y(s)$  sledi:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \cdot U(s) = \frac{U(s)}{1+G(s)} \cdot G(s). \quad (2)$$

Upoređivanjem izraza (1) (2) sledi:

$$E(s) = \frac{1}{1+G(s)} \cdot U(s). \quad (3)$$

Prema izrazu (3), da bi se greška smanjila moduo  $[1+G(s)]$  mora da bude veći od 1 za ceo interval promenljive  $s$  koji se razmatra.

Neka je sada  $H(s) \neq 1$  (slika 3). Izlaz  $Y(s)$  je opisan jednačinom:

$$Y(s) = E_a(s)G(s) = G(s)[U(s) - H(s)Y(s)], \quad (4)$$

odakle je:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1+GH(s)} \cdot U(s), \quad (5)$$

odnosno:

$$E_a(s) = \frac{1}{1+GH(s)} \cdot U(s). \quad (6)$$

Iz izraza (6) se vidi da je uslov smanjenja greške, da moduo  $[1+GH(s)]$  bude veći od 1 za ceo interval  $s$  koji se razmatra.

Signal  $E_a(s)$  predstavlja meru greške  $E(s)$ . Vidi se da tačnost merenja raste kako dinamika  $H(s)$  postaje zanemarivija i pojačanje se bliži jedinici ( $H(s) \approx 1$ ), na intervalu  $s$  koji se posmatra. U daljem izlaganju će se detaljnije posmatrati greška rada sistema u stacionarnom stanju.

## Osetljivost sistema na promenu vrednosti parametara

Proces, predstavljen funkcijom prenosa  $G(s)$ , bez obzira na svoju prirodu (fiziku, strukturu) je podložan uticajima promenljive okoline, starenja, promeni (nepoznavanju) stvarnih vrednosti parametara i drugim prirodnim uticajima koji utiču na upravljanje. Kod sistema bez povratne sprege svi ovi uticaju rezultuju u promeni izlaznog signala, i netačnom radu sistema. Kod sistema sa povratnom spregom se ta promena izlaznog signala registruje i automatski se menja upravljački signal u cilju korekcije i dovođenja izlaznog signala na željenu vrednost. Iz navedenih razloga je osetljivost SAU na promene parametara sistema od primarnog značaja, a najveća prednost SAU sa povratnom spregom se ogleda u činjenici da oni redukuju tu osetljivost.

Posmatra se sistem sa povratnom spregom opisan izrazom (5). Neka je  $GH(s) \gg 1$ . Tada je:

$$Y(s) \approx \frac{1}{H(s)} U(s). \quad (7)$$

Iz izraza (7) se vidi da u datim uslovima na promenu izlaza deluje samo  $H(s)$ , koje može biti konstanta. Ako je  $H(s)=1$  postignut je željeni rezultat, izlaz je jednak ulazu. Kod ovakvog pristupa se mora voditi računa o činjenici da  $GH(s) \gg 1$  može prouzrokovati visoko oscilatoran i nestabilan odziv sistema. Ipak, činjenica je da se povećanjem modula funkcije povratnog prenosa  $GH(s)$  smanjuje uticaj promene parametara procesa  $G(s)$  na izlazni signal. Odavde se vidi i prva prednost sistema sa povratnom spregom, a to je redukcija uticaja promene parametara procesa  $G(s)$  na rad celokupnog sistema.

Efekte promene parametara će biti ilustrovani sledećim primerom. Neka se parametri procesa promene tako da je nova funkcija prenosa  $G(s)+\Delta G(s)$ . Tada je promena izlaza sistema bez povratne sprege:

$$\Delta Y(s) = \Delta G(s) U(s). \quad (8)$$

Za sistem sa povratnom spregom je:

$$Y(s) + \Delta Y(s) = \frac{G(s) + \Delta G(s)}{1 + (G(s) + \Delta G(s))H(s)} U(s). \quad (9)$$

Promena izlaza sistema sa povratnom spregom je:

$$\Delta Y(s) = \frac{\Delta G(s)}{(1 + GH(s) + \Delta GH(s))(1 + GH(s))} U(s). \quad (10)$$

Kada je  $GH(s) \gg \Delta GH(s)$ , što se najčešći slučaj, izraz (10) postaje:

$$\Delta Y(s) = \frac{\Delta G(s)}{[1 + GH(s)]^2} U(s). \quad (11)$$

Posmatrajući uporedo izraze (8) i (11) vidi se da je uticaj promene parametara u sistemu sa povratnom spregom redukovan faktorom  $[1+GH(s)]$ , koji je najčešće mnogo veći od 1. Faktor  $[1+GH(s)]$  igra veoma važnu ulogu u karakteristikama sistema sa povratnom spregom.

**Osetljivost sistema** se definiše kao relativna promena funkcije spregnutog prenosa sistema  $W_s(s)$  u odnosu na relativnu promenu funkcije prenosa procesa  $G(s)$ . Ako je spregnuti prenos sistema:

$$W_s(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}, \quad (12)$$

osetljivost sistema se definiše kao:

$$S = \frac{\Delta W_s(s)/W_s(s)}{\Delta G(s)/G(s)}, \quad (13)$$

odnosno ako se sa konačno malih pređe na beskonačno male promene parametara:

$$S = \frac{\partial W_s(s)/W_s(s)}{\partial G(s)/G(s)} = \frac{\partial \ln W_s(s)}{\partial \ln G(s)}. \quad (14)$$

Na osnovu poslednje dve jednačine se vidi da je osetljivost sistema bez povratne sprege jednaka 1. Osetljivost sistema sa povratnom spregom se određuje prema obrascu (14).

Ako je spregnuti prenos sistema:

$$W_s(s) = \frac{G(s)}{1+GH(s)}, \quad (15)$$

tada je osetljivost sistema data izrazom:

$$S_G^{W_s} = \frac{\partial W_s}{\partial G} \cdot \frac{G}{W_s} = \frac{1}{(1+GH)^2} \cdot \frac{G}{(1+GH)}, \quad (16)$$

ili:

$$S_G^{W_s} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}. \quad (17)$$

Osetljivost sistema sa povratnom spregom na promene elementa povratne sprege  $H(s)$  je:

$$S_H^{W_s} = \frac{\partial W_s}{\partial H} \cdot \frac{H}{W_s} = \left( \frac{G}{1+GH} \right)^2 \cdot \frac{-H}{G/(1+GH)} = \frac{-GH}{1+GH}, \quad (18)$$

odakle se vidi da se za velike vrednosti  $GH$  osetljivost sistema približava jedinici, odnosno da promene  $H(s)$  direktno utiču na izlaz sistema i to u velikoj meri. Iz tog razloga je veoma važno realizovati povratnu spregu od elemenata na koje će uticaji okoline i promene parametara biti neznatne (uzeti što kvalitetniju opremu - senzore).

Često se traži osetljivost sistema na promenu nekog parametra  $\alpha$ , procesa  $G(s)$ . Koristeći ulančavanje može se napisati:

$$S_\alpha^{W_s} = S_G^{W_s} S_\alpha^G. \quad (19)$$

Ako se funkcija spregnutog prenosa predstavi u obliku racionalnog razlomka dva polinoma:

$$W_s(s, \alpha) = \frac{P_m(s, \alpha)}{Q_n(s, \alpha)}, \quad (20)$$

tada je:

$$S_\alpha^{W_s} = \frac{\partial \ln W_s}{\partial \ln \alpha} = \frac{\partial \ln P_m}{\partial \ln \alpha} \Big|_{\alpha_0} - \frac{\partial \ln Q_n}{\partial \ln \alpha} \Big|_{\alpha_0} = S_\alpha^{P_m} - S_\alpha^{Q_n}, \quad (21)$$

gde je  $\alpha_0$  nominalna vrednost parametra  $\alpha$ .

Mogućnost redukcije uticaja promene parametara na ponašanje sistema primenom zatvorene petlje je značajna prednost sistema sa povratnom spregom. Da bi se postigla visoka tačnost rada sistema bez povratne sprege potrebno je veoma pažljivo birati komponente koje čine  $G(s)$ . Kod sistema sa povratnom spregom nije potrebno posvetiti toliku pažnju izboru komponenti  $G(s)$ , jer je osetljivost sistema na promenu  $G(s)$  značajno redukovana faktorom  $[1+GH(s)]$ .

## Regulacija tranzijentnog odziva sistema automatskog upravljanja

Jedna od veoma bitnih karakteristika SAU je i tranzijentni odziv. **Tranzijentni odziv je odziv sistema u funkciji vremena.** Pošto je namena SAU da obezbede zahtevani odziv, tranzijentni odziv se podešava do god izlaz sistema ne postigne zadovoljavajuću vrednost. Ako sistem bez povratne sprege ne daje zadovoljavajući odziv, mora se promeniti ceo proces  $G(s)$ , ili neka njegova komponenta. Nasuprot tome, kod sistema sa povratnom spregom željeni odziv se najčešće može postići podešavanjem parametara povratne sprege. Najčešće se na red sa procesom postavlja regulator, funkcije prenosa  $G_1(s)$  i podešavanjem njegovih parametara se postiže željeni karakter odziva. Ovo će biti objašnjeno na sledećem primeru.

Posmatra se jednosmerni motor sa funkcijom prenosa:

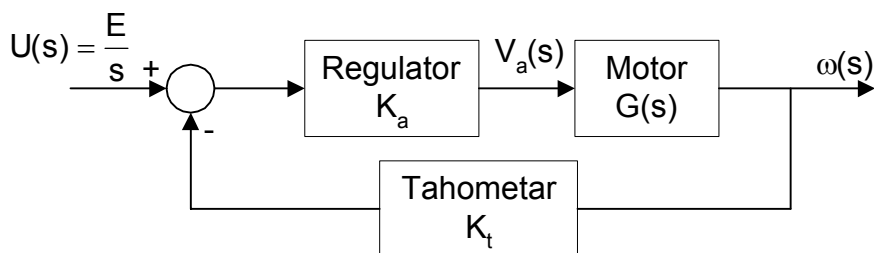
$$G(s) = \frac{\omega(s)}{U_a(s)} = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1}, \quad (22)$$

koja je izvedena ranije (kod funkcije prenosa). Ako je upravljački napon  $u_a(t)$  odskočna funkcija, amplitude  $E$ , odnosno  $U_a(s) = E/s$ , onda je:

$$\omega(t) = K_1 E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right). \quad (23)$$

Na izraza (23) se vidi da brzina odziva sistema zavisi od  $\tau_1$ . Ako je odziv sistema spor potrebno je promeniti ceo motor i izabrati odgovarajući, sa odgovarajućim  $\tau_1$ . Ovo može biti problem jer  $\tau_1$  zavisi od inercije celog pogona.

Sada posmatra sistem sa zatvorenom povratnom spregom, prikazan na slici 6.



Slika 6

Funkcija spregnutog prenosa ovog sistema je:

$$W_s(s) = \frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{K_a K_1 / \tau_1}{s + [(1 + K_a K_t K_1) / \tau_1]}. \quad (24)$$

Ako je referentni napon  $u(t)$  odskočna funkcija, amplitude  $E$ , odnosno  $U(s) = E/s$ , onda je:

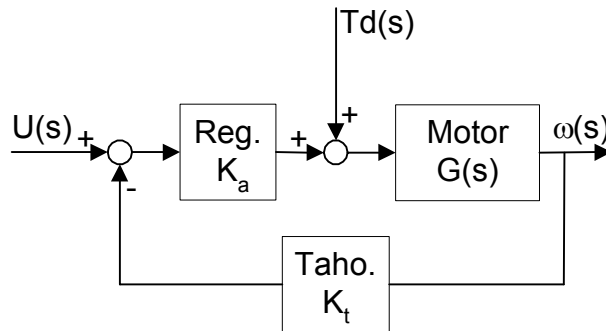
$$\omega(t) = \frac{K_a K_1}{1 + K_a K_t K_1} E \left( 1 - e^{-\frac{1 + K_a K_t K_1}{\tau_1} t} \right), \quad (25)$$

odakle se vidi da se povećanjem pojačanja regulatora  $K_a$  sistem može ubrzati ili usporiti, naravno u određenim granicama.

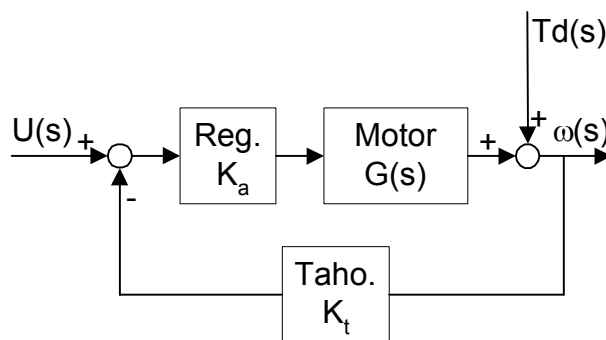
## Signal poremećaja u sistemima automatskog upravljanja

Jedan od efekata povratne sprege jeste mogućnost delimične eliminacije efekata dejstva signala poremećaja. Signal poremećaja je neželjeni ulaz u sistem čije se dejstvo manifestuje promenom izlazne veličine. Mnogi SAU trpe poremećaje, usled čega se izlazni signal menja i odstupa od željene vrednosti. Poremećaji mogu da deluju na različitim

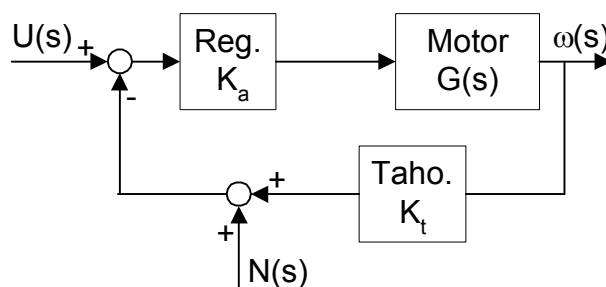
mestima u sistemu. Ako se posmatra jedan regulisani elektromotorni pogon (slika 6), poremećaj može da deluje na sam proces (motor), na izlaz (brzinu celog sistema) ili na tahometar (šum pri merenju). Ovi slučajevi su prikazani blok dijagramima na slici. Poremećaj koji deluje na proces (slika 7a) i na izlaz (slika 7b) je označen sa  $T_d(s)$ , a šum pri merenju (slika 7c) sa  $N(s)$ . Sa slike 7 se vidi da se pri modelovanju sistema poremećaj modeluje kao ulaz u sistem (doduše neželjen) i da se dalje sa njim postupa kao i sa svakim drugim ulazom u sistem. Mogu se određivati funkcije prenosa od mesta dejstva poremećaja do izlaza sistema, određivati odziv, ispitivati osetljivost itd.



a)



b)



c)

Slika 7

Posmatra se sistem prikazan na slici 7a). Zavisnost izlaza ( $\omega(s)$ ) od referentnog ulaza ( $U(s)$ ) i poremećaja ( $T_d(s)$ ) je data sledećim izrazom

$$\omega(s) = \begin{bmatrix} \frac{K_a G(s)}{1+K_a K_t G(s)} & \frac{G(s)}{1+K_a K_t G(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ T_d(s) \end{bmatrix}.$$

Ako se uvedu oznake  $W_1(s) = \frac{K_a G(s)}{1+K_a K_t G(s)}$  i  $W_2(s) = \frac{G(s)}{1+K_a K_t G(s)}$  prethodni izraz se može

napisati u obliku

$$\omega(s) = \begin{bmatrix} W_1(s) & W_2(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ T_d(s) \end{bmatrix}.$$

Sada se mogu odrediti sledeći koeficijenti osetljivosti

$$S_{K_t} = \frac{W_1(s) \cdot (-K_a K_t G(s))}{1 + K_a K_t G(s)},$$

$$S_{K_a} = \frac{W_1(s)}{1 + K_a K_t G(s)},$$

$$S_{K_a} = S_{K_t} = \frac{W_2(s) \cdot (-K_a K_t G(s))}{1 + K_a K_t G(s)}.$$

Uočava se da su koeficijenti osetljivosti  $S_{K_t}$ ,  $S_{K_a}$  i  $S_{K_t}$  međusobno jednaki,

odnosno da je osetljivost funkcija prenosa  $W_1(s)$  i  $W_2(s)$  na promenu pojačanja elemenata povratne sprege jednaka (i velika). Ako se usvoji da je  $K_t K_a G(s) \gg 1$ , što je vrlo verovatno, vidi se da vrednost koeficijenta osetljivosti praktično 1 (100%). S druge strane, koeficijent

osetljivosti funkcije prenosa  $W_1(s)$  na promenu pojačanja aktuatora  $K_a$  ( $S_{K_a}$ ) je veoma

mali. Ako se usvoji da je  $K_t K_a G(s) \gg 1$  vidi se da vrednost koeficijenta osetljivosti teži ka nuli. Ovako slaba osetljivost funkcije prenosa  $W_1(s)$  na promenu pojačanja aktuatora  $K_a$ , koji se nalazi u direktnoj grani, je u stvari posledica dejstva povratne sprege. Iz prethodne analize može se zaključiti da je pri konfigurisanju sistema automatskog upravljanja od prvorazrednog značaja izbor elemenata povratne sprege. Od kvaliteta elemenata povratne sprege (senzori i prenosni elementi) zavisi kvalitet upravljanja, i to u znatno većoj meri nego od promene karakteristika samog procesa ili regulatora sa aktuatorom.

## Greška rada sistema u stacionarnom stanju

Posmatra se odziv sistema na odskočnu pobudu, tokom vremena što je prikazano na slici 8. Kriva odziva se vremenski može podeliti na dva dela: prelazni režim i stacionarno stanje (slika 8). Prelazni režim traje od početka delovanja pobude do trenutka kada se vrednosti izlaznog (posmatranog) signala ustali. Tada nastupa stacionarno stanje, koje traje do promene pobudnog signala i/ili dejstva poremećaja.

Vrednost nekog signala  $x(t)$  u stacionarnom stanju se izračunava kao:

$$x(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t), \quad (26)$$

ili primenom druge granične teoreme Laplace-ove transformacije:

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot x(s). \quad (27)$$

Dalje će se razmatrati greške rada u stacionarnom stanju sistema sa i bez povratne sprege. Greška rada sistema u stacionarnom stanju je greška rada nakon što u sistemu iščeznu svi prelazni procesi.

Za sistem bez povratne sprege (slika 2) je:

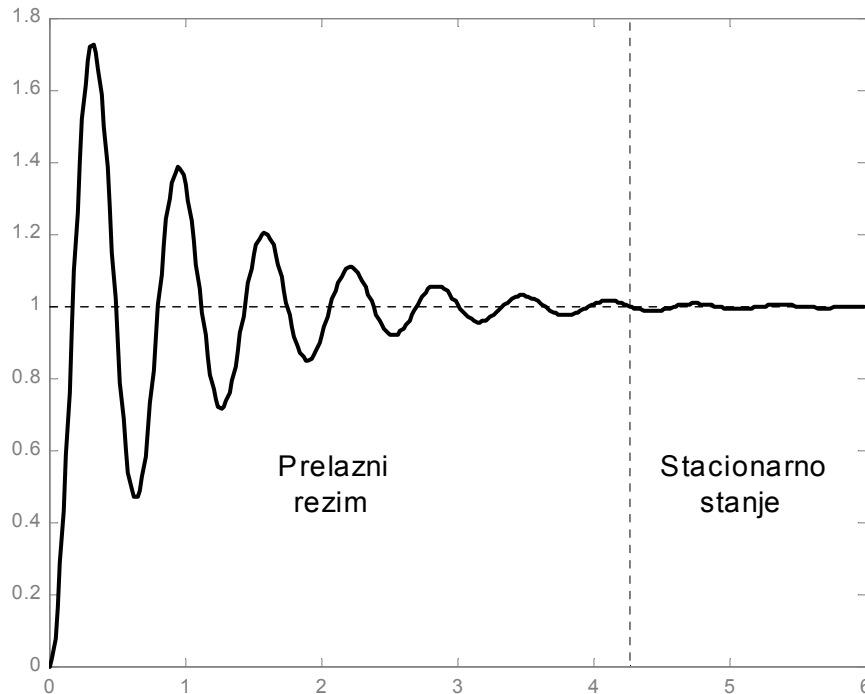
$$E_0(s) = U(s) - Y(s) = [1 - G(s)]U(s). \quad (28)$$

Neka je sistem pobuđen jediničnom odskočnom funkcijom, odnosno neka je  $U(s) = 1/s$ . Tada je:



$$e_0(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_0(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot [1 - G(s)] \cdot \frac{1}{s} = 1 - G(0). \quad (29)$$

Da bi sistem bez povratne sprege eliminisao grešku u stacionarnom stanju mora biti ispunjen uslov  $G(0)=1$ .



Slika 8.

Za sistem sa jediničnom povratnom spregom važi izraz (3), odnosno ako je  $U(s)=1/s$ :

$$e_c(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot E_c(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{1+G(s)} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{1+G(0)}. \quad (30)$$

Iz izraza (30) se vidi da  $e_c(\infty) \rightarrow 0$  kada  $G(0) \rightarrow \infty$ . Vrednost  $G(s)$  kada je  $s=0$  se često naziva jednosmerno pojačanje i obično je veće od 1. Na osnovu izraza (29) i (30) se može zaključiti da sistem bez povratne sprege ima grešku značajno velike amplitude (modula) dok sistem sa povratnom spregom ima sve manju i manju grešku rada u stacionarnom stanju kako  $|G(0)|$  raste.

Sada se postavlja pitanje gde je prednost povratne sprege ako je moguće podesiti da bude  $G(0)=1$  i realizovati SAU bez povratne sprege kod koga je  $e_0(\infty)=0$ ? Naravno, u sistemu bez povratne sprege može se izvesti kalibracija i podesiti da bude  $G(0)=1$ . Ali... U toku rada sistema njegovi parametri se menjaju, deluju spoljni poremećaji, odnosno menja se  $G(s)$  usled dejstva različitih faktora. Ovo sve za sobom povlači i promenu  $G(0)$ , odnosno  $e_0(\infty)$  će biti različito od 0 sve dok se ne izvrši servis i rekalkibracija celog sistema.  $e_0(\infty)$  će biti veće, što je  $G(s)$  osetljivije na promenu nekog od parametara. Na sve ovo se dodaje i činjenica da je  $G(0)=1$  uslov koji se praktično u najvećem broju slučajeva može ispuniti jako teško ili nikako.

Za razliku od prethodnog slučaja u sistemima sa povratnom spregom meri se signal greške i preduzima odgovarajuće upravljanje u cilju smanjenja vrednosti tog signala. Odavde se vidi prednost SAU sa povratnom spregom. Kod SAU sa povratnom spregom greška rada sistema mnogo manje zavisi od spoljnih uticaja, osetljivosti na promenu

parametara, kalibracije i sl nego kod sistema bez povratne sprege. Ovo će se ilustrovati sledećim primerom.

**Primer 2:** Posmatra se proces sa funkcijom prenosa:  $G(s) = \frac{K}{Ts+1}$ . Ovo je funkcija prenosa (u opštem obliku) nekog termičkog procesa, regulacije napona ili nivoa tačnosti u rezervoaru. Neka je željena vrednost - ulazni signal konstanta (želi se da proces ima konstantnu temperaturu, napon ili nivo), što se može opisati odskočnom funkcijom, a da se ne komplikuje puno neka to bude jedinična odskočna funkcija, odnosno  $u(t)=h(t)$  ( $U(s)=1/s$ ).

Za sistem bez povratne sprege je:

$$e_0(\infty) = 1 - G(0) = 1 - K, \quad (2.1)$$

i ako se podesi da je  $K=1$ , sledi  $e_0(\infty)=0$ , i to se može učiniti.

Za sistem sa povratnom spregom je:

$$e_c(\infty) = \frac{1}{1+G(0)} = \frac{1}{1+K}. \quad (2.2)$$

Idealno bi bilo da  $K \rightarrow \infty$ , jer bi tada  $e_c(\infty) \rightarrow 0$ . To se naravno ne može postići, ali se  $K$  može postaviti na neku veliku vrednost, i neka je  $K=100$ . Sada je:

$$e_c(\infty) = \frac{1}{1+100} = 0,0099. \quad (2.3)$$

Ako se  $e_c(\infty)$  izrazi u procentima, onda je:

$$e_c(\infty)\% = \frac{u(t)-y(t)}{u(t)} \cdot 100\% = \frac{e_c(\infty)}{u(t)} \cdot 100\% = 0,99\% \approx 1\%. \quad (2.4)$$

Neka se sada  $K$  promeni za 10%.

Sistem bez povratne sprege:

$$\Delta K = K_{\text{staro}} - K_{\text{novo}}$$

$$\frac{\Delta K}{K_{\text{staro}}} \cdot 100\% = 10\% \Rightarrow \frac{K_{\text{staro}} - K_{\text{novo}}}{K_{\text{staro}}} \cdot 100\% = 10\% \Rightarrow K_{\text{novo}} = 0.9$$

$$|\Delta e_0(\infty)| = |e_{0\text{staro}}(\infty) - e_{0\text{novo}}(\infty)| = |1 - K_{\text{staro}} - 1 + K_{\text{novo}}| = 0.1$$

$$e_0(\infty)\% = \frac{e_0(\infty)}{u(t)} \cdot 100\%$$

$$\Delta e_0(\infty)\% = \frac{e_{0\text{staro}}(\infty) - e_{0\text{novo}}(\infty)}{u(t)} \cdot 100\% = \frac{\Delta e_0(\infty)}{u(t)} \cdot 100\% = 10\%.$$

Sistem sa povratnom spregom

$$\Delta K\% = \frac{K_{\text{staro}} - K_{\text{novo}}}{K_{\text{staro}}} \cdot 100\% = 10\% \Rightarrow K_{\text{novo}} = 90$$

$$e_{c\text{novo}}(\infty) = \frac{1}{1+K_{\text{novo}}} = \frac{1}{91}$$

$$|\Delta e_C(\infty)| = |e_{C\text{staro}}(\infty) - e_{C\text{novi}}(\infty)| = \left| \frac{1}{101} - \frac{1}{91} \right| = 0.0011$$

$$\Delta e_C(\infty)\% = \frac{\Delta e_C(\infty)}{u(t)} \cdot 100\% = 0.11\%.$$



## Cena povratne sprege

Očigledno je da dodavanje povratne sprege sa sobom donosi i određene prednosti. Naravno, prednosti sa sobom donose i određenu cenu.

Prvo, uvođenjem povratne sprege raste broj komponenti i složenost sistema. Da bi se ostvarila povratna veza potrebno je u sistem postaviti određene komponente povratne veze, od kojih je najvažnija senzor – merač izlaznog signala. Senzor je često najskuplja komponenta regulacionog sistema, a osim toga uvodi šum i netačnost u sistem.

Drugo, uvođenjem povratne sprege dolazi do gubitka pojačanja (prenosa). U sistemu bez povratne sprege prenos je  $G(s)$  i on se redukuje na  $\frac{G(s)}{1+G(s)}$  zatvaranjem jedinične negativne povratne sprege. Redukcija pojačanja zatvorene povratne sprege je  $\frac{1}{1+G(s)}$ , i to je tačno faktor koji smanjuje osetljivost sistema na promene parametara i delovanje poremećaja.

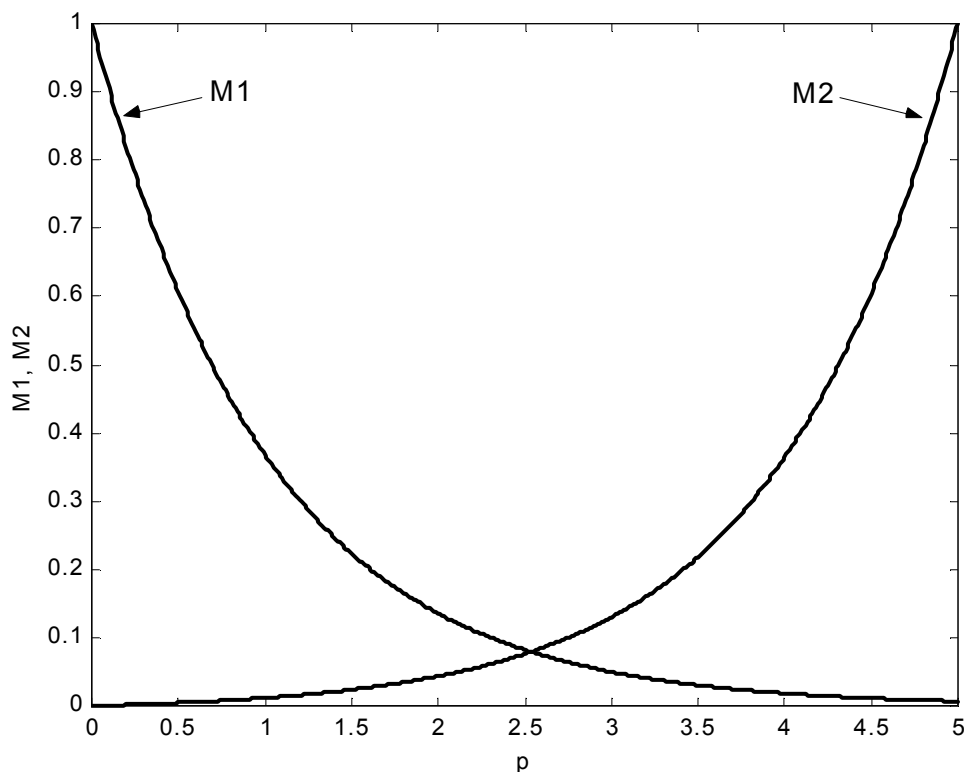
Iz dosada navedenog sledi da se otvorenom povratnom spregom štedi, ali se ta ušteda žrtvuje u korist kvalitetnijeg upravljanja sistemom primenom zatvorene povratne sprege. Takođe se primećuje da je pojačanje signala između ulaza i izlaza manje, ali da je u suštini očuvano pojačanje snage (aktuatora) što je veoma bitno (i u potpunosti iskorišteno) u sistemima sa zatvorenim povratnom spregom. **Konačno, cena povratne sprege može biti gubitak stabilnosti sistema. Sistem koji je bez povratne sprege bio stabilan može nakon zatvaranja povratne sprege postati nestabilan.** Ovo pitanje će kasnije biti detaljnije razmatrano. Postoji još problema vezanih za projektovanje sistema sa povratnom spregom, ali generalno gledano, prednosti ovakvih sistema prevlađuju nad teškoćama i njihovim lošim osobinama te se široko primenjuju.

Sve dosad navedeno ima jedan cilj. Da se ostvari  $y(t)=u(t)$ , odnosno da izlazni signal bude jednak ulaznom. Postavlja se pitanje, zašto se onda jednostavno ne upotrebi otvorena povratna sprega, postavi  $G(s)=1$  i postigne željeni cilj? Jedan deo odgovora leži u prethodnoj analizi rada sistema bez povratne sprege, ali glavni razlog leži u dinamici sistema. Jednostavno, između  $u(t)$  i  $y(t)$  postoji fizički proces koji poseduje svoju dinamiku. Ta se dinamika ne može zanemariti, a usvajanjem  $G(s)=1$  bi se upravo to učinilo. Drugim rečima, potrebno je vreme da se  $u(t)$  prenese od ulaza do izlaza sistema  $y(t)$ , pri tome se ulazni signal može transformisati, promeniti intenzitet, pa čak i fizičku dimenziju. Sve ove transformacije i dinamika se opisuju diferencijalnim jednačinama čijim zanemarivanjem bi se poništila fizika sistema i dobio model koji ne odgovara stvarnom stanju stvari. Iz ovog razloga je nemoguće ostvariti  $G(s)=1$  i povratna sprega je jedini fizički ostvariv način da se greška rada sistema svede na minimum.

## Performanse sistema automatskog upravljanja

Za analizu i sintezu SAU važno je na početku definisati određene performanse – osobine sistema i njihove mere. One u stvari predstavljaju matematički opis nekih fizičkih karakteristika odziva sistema. Nakon toga, bazirajući se na željenim performansama, podešavaju se parametri sistema u cilju obezbeđivanja određenog kvaliteta odziva - izlaza sistema. Pošto je dinamika nerazdvojni deo SAU, njihove se osobine opisuju terminima vezanim za prelazni režim i stacionarno stanje. Prelazni režim karakteriše tranzijentni odziv koji iščezava tokom vremena, dok stacionarno stanje karakteriše odziv u stacionarnom stanju koji traje od trenutka smirivanja izlaznog signala pa sve do promene pobude i/ili dejstva poremećaja.

Problemi projektovanja SAU u sebi često sadrže potrebe zadovoljenja određenih zahteva, kao što je na primer tačnost rada u stacionarnom stanju. Često je potrebno zadovoljiti više različitih, često kontradiktornih, uslova i tada se pribegava kompromisima. Takva jedna situacija je opisana sledećim primerom. Neka je  $M_1$  mera performanse  $m_1$ , i  $M_2$  mera performanse  $m_2$ . Obe zavise od parametra  $p$  na način kako je to prikazano na slici 1. Zahtev pri projektovanju SAU je da se pogodnim izborom vrednosti parametra  $p$  obe vrednosti,  $M_1$  i  $M_2$ , što više smanje. Ako je  $p=0$  tada je  $M_2=0$ , ali  $M_1 \rightarrow \infty$ . Ako je  $p=5$  situacija je obrnuta, što opet ne valja. Vidi se da će pri izboru vrednosti  $p$  takve, da je jedna mera performanse ( $M_1$  ili  $M_2$ ) jednaka nuli druga biti jako velika. Sada je potrebno pribeci kompromisu i postaviti  $p$  na vrednost  $p \approx 2.5$ , tako da sada  $M_1$  i  $M_2$  imaju neku zajedničku minimalnu vrednost, odnosno oba zahteva su simultano zadovoljena na maksimalno moguć način.



Slika 1.

## Karakteristične pobudne funkcije – test signali

Karakteristike rada sistema u vremenskom domenu su jako bitne, pošto se i ponašanje SAU prati u toku vremena. Iz tog razloga odziv sistema u vremenskom domenu je od primarnog značaja, a sa njim i određene karakteristike. Pre svega, potrebno je utvrditi da li je sistem stabilan. Ako jeste, pobuđuje se određenim pobudnim signalom, meri se (registruje) odziv i na taj način se dolazi do podataka o određenim merama performansi. Pošto je stvarni pobudni signal nekog sistema unapred nepoznat, to se za određivanje mera performansi koriste standardni pobudni – test signali. Postoji nekoliko razloga koji opravdavaju ovakav postupak:

- postoji korelacija između odziva na test signal i ponašanja sistema u realnim uslovima;
- koristeći iste ulazne signale moguće je uporediti različita rešenja nekog problema i izabrati najbolje;
- realni ulazni signali su veoma slični standardnim test signalima.

Standardni pobudni signali su prikazani tabelom 1 i slikom 2.

Test signal	$u(t)$	$U(s)$
Step ili odskočni signal $u(t)=Ah(t)$	$0; t < 0$ $A; t \geq 0$	$\frac{A}{s}$
Ramp ili nagibni signal $u(t)=At$	$0; t < 0$ $At; t \geq 0$	$\frac{A}{s^2}$
Parabolični signal $u(t)=At^2$	$0; t < 0$ $At^2; t \geq 0$	$2 \frac{A}{s^3}$
Jedinični impulsni (delta ili Dirakov) signal $u(t)=\delta(t)$	$0; t \neq 0$ $\infty; t = 0$ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$	1
Prosto periodična pobuda $u(t)=\sin\omega t$	$0; t < 0$ $A\sin\omega t; t \geq 0$	$\frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$
Prosto periodična pobuda $u(t)=\cos\omega t$	$0; t < 0$ $A\cos\omega t; t \geq 0$	$\frac{As}{s^2 + \omega^2}$

Tabela 1. Standardni pobudni signali

Od navedenih test signala posebno je interesantan  $\delta(t)$ , jer je  $U(s)=1$ . Prema definiciji funkcije prenosa sistema ( $G(s)$ ) izlaz ( $Y(s)$ ) je, za pobudni delta impuls:

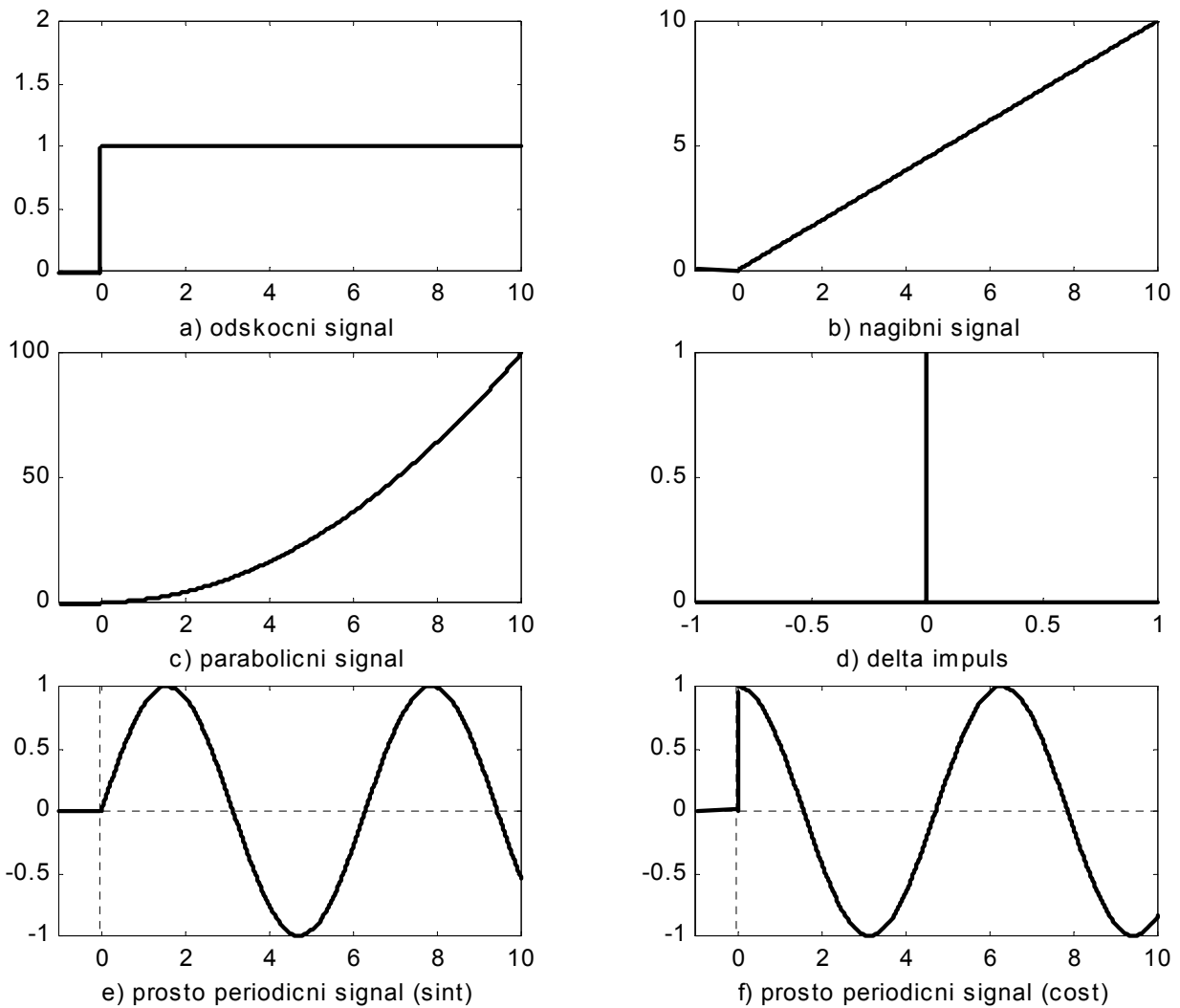
$$Y(s)=G(s)U(s)=G(s), \quad (1)$$

što je u vremenskom domenu:

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=g(t). \quad (2)$$

Vidi se da je odziv sistema baš jednak inverznoj Laplace-ovoj transformaciji funkcije prenosa, odnosno "funkciji prenosa u vremenskom domenu". Dalje, ako se posmatraju prva tri pobudna signala iz tabele 1, vidi se da su to signali tipa  $u(t)=t^n h(t)$ , odnosno

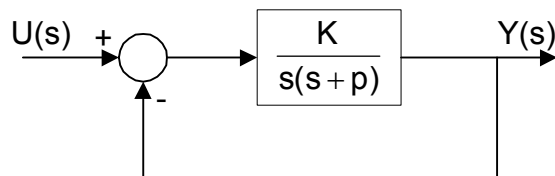
$U(s)=\frac{n!}{s^{n+1}}$ , pa se između odziva na te pobudne signale mogu postaviti određene relacije.



Slika 2.

## Karakteristike sistema drugog reda

Posmatra se sistem drugog reda prikazan na slici 3.



Slika 3.

Odziv sistema  $Y(s)$  je definisan izrazom:

$$Y(s) = \frac{K}{s^2 + ps + K} U(s). \quad (3)$$

Rešenja karakteristične jednačine:

$$s^2 + ps + K = 0 \quad (4)$$

ako su konjugovano kompleksna, se mogu napisati u obliku:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}, \quad (5)$$

gde je:

$\xi$  – relativni koeficijent prigušenja ( $0 \leq \xi \leq 1$ );

$\omega_n$  – sopstvena neprigušena učestanost ( $0 \leq \omega_n \leq \infty$ ).

Sada se izraz (3) može napisati sledećem u obliku:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} U(s). \quad (6)$$

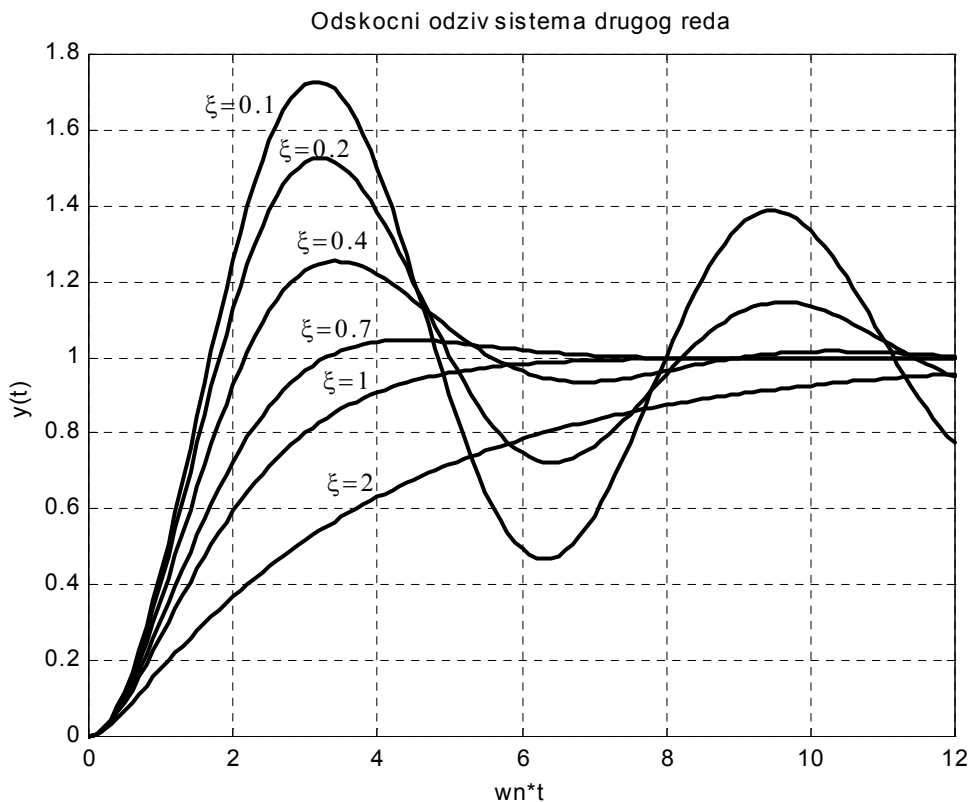
Odskočni odziv sistema je prema izrazu (6):

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}, \quad (7)$$

što je u vremenskom domenu:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\xi^2} t + \theta), \quad (8)$$

gde je  $\theta = \arccos(\xi)$ ,  $0 \leq \xi \leq 1$ . Ako se  $\xi$  menja u datim granicama, a  $\omega_n = \text{const.}$ , tada se za odziv  $y(t)$ , izraz (8), dobija familija krivih linija prikazanih na slici 4.



Slika 4.

Ako se posmatra jedan konkretan slučaj odskočnog odziva, tada je moguće definisati određene veličine koje karakterišu rad sistema u prelaznom režimu u vremenskom domenu, što je prikazano na slici 5. Pre nego što se definišu navedeni pokazatelji, potrebno je odrediti vrednosti signala  $y(t)$  (izraz (8)) u stacionarnom stanju, i to je:

$$y_{ss} = y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 1 \quad (9)$$

Sada se definišu sledeće veličine:

$T_k$  – vreme kašnjenja. Vreme potrebno da se vrednost signala  $y(t)$  promeni od 0 do 50% vrednosti u stacionarnom stanju.

$T_{u1}$  – vreme uspona. Vreme potrebno da se vrednost signala  $y(t)$  promeni od 0 do 100% vrednosti u stacionarnom stanju. Kod sistema sa velikim prigušenjem ( $\xi$  blisko jedinici)  $T_{u1}$  traje veoma dugo, tako da se u praksi koristi druga definicija za vreme uspona:

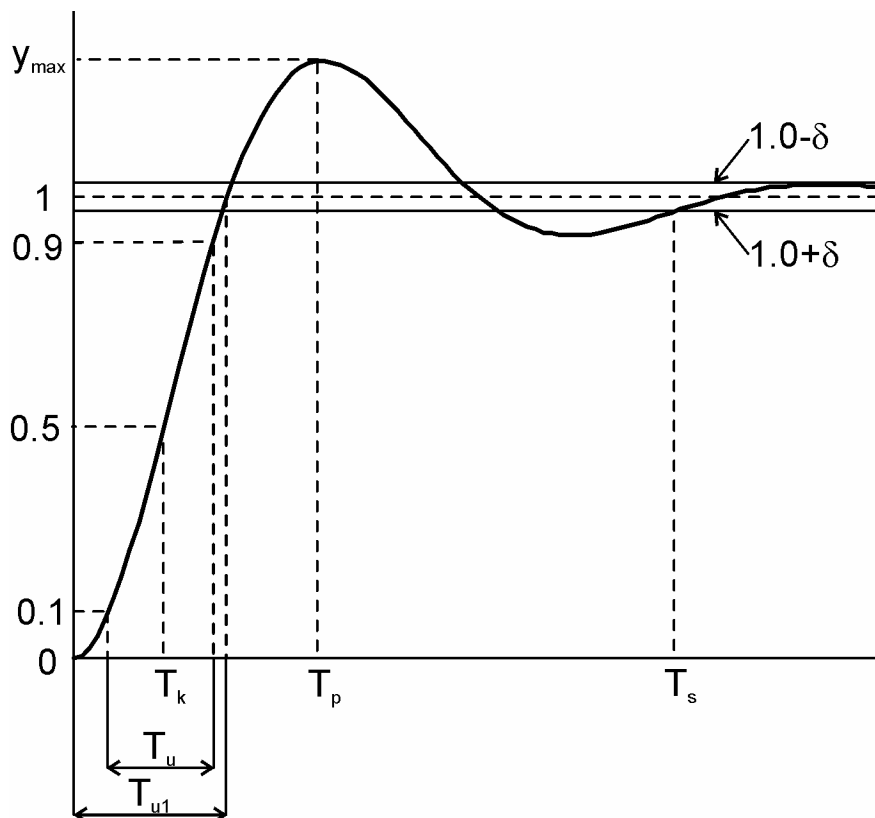
$T_u$  - vreme uspona. Vreme potrebno da se vrednost signala  $y(t)$  promeni od 10% do 90% vrednosti u stacionarnom stanju.

$T_p$  – vreme preskoka. Trenutak kada signal  $y(t)$  dostiže svoju maksimalnu vrednost  $y_{max}$ .

$\Pi\%$  - preskok. Definiše se u procentima na sledeći način:

$$\Pi\% = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}} 100\% \quad (10)$$

$T_s$  – vreme smirenja. Vreme potrebno da amplituda signala  $y(t)$  uđe u pojas širine  $2\delta$  oko vrednosti  $y_{ss}$ , odnosno u pojas  $y_{ss} \cdot (1 \pm \delta)$ . Za  $\delta$  se najčešće usvaja 2% ili 5% vrednosti odziva u stacionarnom stanju  $y_{ss}$ .



Slika 5.

Sve definisane veličine se mogu odrediti na osnovu izraza (8), direktnim izračunavanjem, ali se za neke mogu postaviti približni ili direktni obrasci koji olakšavaju njihovo određivanje, što će sada biti i učinjeno.

### Određivanje vremena smirenja $T_s$

Anvelopa odziva je određena izrazom  $e^{-\xi\omega_n t}$ . Za ulazak u stacionarno stanje mora biti zadovoljen (približan) uslov:

$$e^{-\xi\omega_n T_s} < 0.02 \text{ (0.05)}, \quad (11)$$

što se svodi na:

$$\xi\omega_n T_s > 4 \text{ (3)}, \quad (12)$$

te je:



$$T_s \approx \frac{4(3)}{\xi \omega_n} = 4(3) \cdot \tau, \quad (13)$$

gde je  $\tau = \frac{1}{\xi \omega_n}$  vremenska konstanta dominantnih polova.

### Određivanje preskoka $\Pi\%$ i vremena preskoka $T_p$ u funkciji $\xi$

Na osnovu opštog izraza za određivanje ekstrema funkcije:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0, \quad (14)$$

odredi se maksimum izraza (8). Vidi se da će prvi maksimum izraza (8) nastupiti kada bude zadovoljen uslov:

$$\omega_n \sqrt{1-\xi^2} T_p = \pi, \quad (15)$$

odakle se određuje:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}. \quad (16)$$

Nakon smene izraza (16) u (8) sledi:

$$y_{\max} = 1 + e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}, \quad (16)$$

te je, na osnovu izraza (9), (10) i (16):

$$\Pi\% = 100 \cdot e^{-\frac{\xi \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}. \quad (16)$$

### Estimacija relativnog koeficijenta prigušenja $\xi$

Na osnovu izraza (8) vidi se da je frekvencija oscilacija odziva  $\omega$ :

$$\omega = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}, \quad (17)$$

i vremenska konstanta:

$$\tau = \frac{1}{\xi \omega_n}. \quad (18)$$

Broj perioda tokom jedne vremenske konstante je:

$$\frac{\omega}{2\pi} \tau = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\xi}. \quad (19)$$

Odziv se smiruje za  $n$  vremenskih konstanti -  $n\tau$  (gde je  $n=4$  prema kriterijumu 2%, odnosno  $n=3$  prema kriterijumu 5%), pa je i broj vidljivih perioda oscilacija odziva baš  $n\tau$ . Sada se, na osnovu izraza (19), može napisati:

$$\text{broj vidljivih perioda} = n \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\xi}. \quad (20)$$

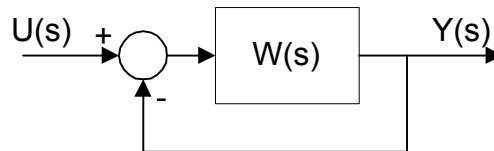
Ako se usvoji  $n=4$  (kriterijum 2%), izraz (20) postaje:

$$\text{broj vidljivih perioda} = 4 \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\xi} \approx \frac{0.55}{\xi}, \quad (21)$$

što je veoma dobra aproksimacija za  $0.2 \leq \xi \leq 0.6$ .

## Veza između lokacije polova funkcije prenosa SAU u kompleksnoj s-ravni i odziva u prelaznom režimu

Na osnovu položaja polova sistema u kompleksnoj s-ravni može se doći do zaključka kakav je karakter odziva bez njegovog eksplicitnog izračunavanja u vremenskom domenu. Posmatra se osnovna upravljačka struktura, prikazana na slici 6.



Slika 6. Elementarna upravljačka struktura sa jediničnom negativnom povratnom spregom

Neka je:

$$W(s) = K \cdot \frac{P_m(s)}{Q_n(s)}, \quad (22)$$

gde je  $n \geq m$ . Funkcija spregnutog prenosa je:

$$W_S(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{KP_m(s)}{KP_m(s)+Q_n(s)}. \quad (23)$$

Karakteristična jednačina je:

$$KP_m(s)+Q_n(s)=0, \quad (24)$$

i na osnovu rešenja karakteristične jednačine  $s_i, i=1,2,\dots,n$  izraz (23) se može napisati u obliku:

$$W_S(s) = \frac{KP_m(s)}{\prod_{i=1}^n (s-s_i)}. \quad (25)$$

Impulsni odziv sistema je:

$$Y(s) = W_S(s) = \frac{KP_m(s)}{\prod_{i=1}^n (s-s_i)}. \quad (26)$$

Neka je  $p$  polova realno i prosto i neka je  $r$  pari polova konjugovano kompleksno. Tada je  $p+2r=n$ . Sada se izraz (26) može napisati u obliku:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^p \frac{A_i}{s+\sigma_i} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\alpha_k s + (\alpha_k^2 + \omega_k^2)}, \quad (27)$$

gde su realni polovi  $s_i = -\sigma_i$  i kompleksni  $s_{k1,2} = -\alpha_k \pm j\omega_k$ . Primenom inverzne Laplace-ove transformacije izraz (27) prelazi u vremenski domen, pa je:

$$y(t) = \sum_{i=1}^p A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{k=1}^r D_k e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \phi_k), \quad (28)$$

gde je  $D_k$  konstanta koja zavisi od  $B_k, C_k, \alpha_k$  i  $\omega_k$ . Iz poslednjeg izraza se vidi da će sistem ući u stacionarno stanje ako i samo ako je  $\forall \sigma_i > 0$  i  $\forall \alpha_k > 0$ . Tada će biti, na osnovu izraza (28):

$$y_{ss}=y(\infty)=\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)=0, \quad (29)$$

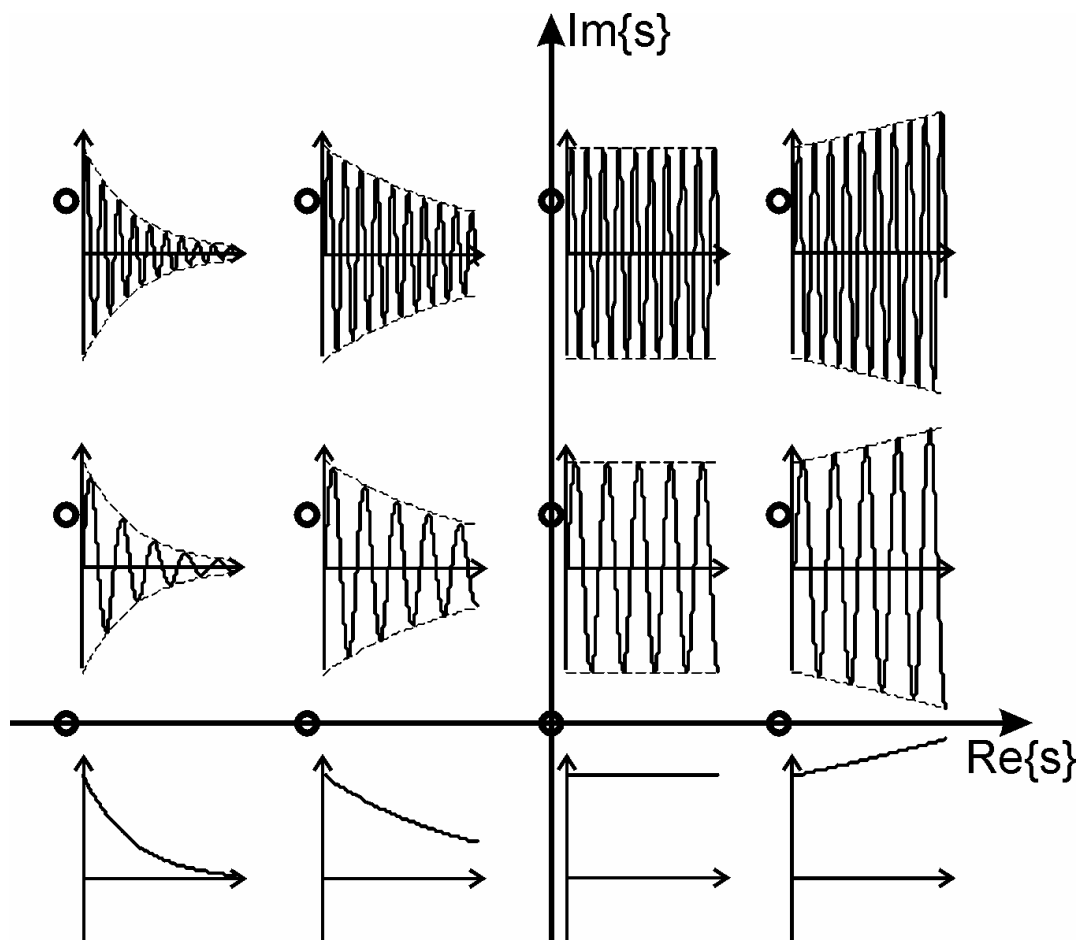
odnosno **sistem će na konačnu pobudu (pobuda koja iščezava tokom vremena) dati konačan odziv ako i samo ako su realni delovi svih polova sistema strogo manji od nule.** Vidljivo je takođe da je desna strana izraza (28) sastavljena od eksponencijalnih (prva suma) i oscilatornih članova promenljive amplitude (druga suma).

Ukoliko bi se analizirani sistem pobudio odskočnim signalom, odziv bi bio:

$$y(t) = A + \sum_{i=1}^p A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{k=1}^r D_k e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \phi_k), \quad (30)$$

odakle se vidi da odziv pored navedena dva sabirka sadrži i konstantu  $A$  – vrednost odziva u stacionarnom stanju (ako sistem ulazi u stacionarno stanje).

Na osnovu izraza (28) i (30) moguće je uspostaviti vezu između položaja polova u  $s$ -ravni i karaktera odziva u vremenskom domenu. Veoma je važno uočiti i zapamtiti ovu vezu, jer se pri analizi i sintezi SAU uglavnom radi u kompleksnom ili frekventnom domenu bez konkretnog izračunavanja odziva, a ipak, sve što se radi, radi se u cilju podešavanja odziva u vremenskom domenu. Projektant SAU bi iz tog razloga na osnovu položaja nula i polova sistema u kompleksnoj  $s$ -ravni trebao da odredi karakter odziva, kao i potrebne promene parametara sistema u cilju usklađivanja odziva sa željenim karakteristikama. Na slici 7 je prikazana veza između lokacije polova u kompleksnoj  $s$ -ravni i karaktera impulsnog odziva SAU.



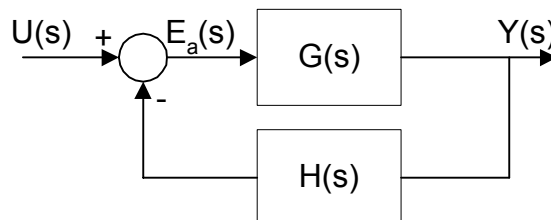
Slika 7.

Posmatrajući sliku 7 može se zaključiti sledeće. Ako sistem poseduje polove samo u levoj poluravni kompleksne s-ravni vidi se da odziv iščezava tokom vremena, dok za polove u desnoj poluravni odziv raste i teži beskonačnosti kada  $t \rightarrow \infty$ . Ako sistem poseduje polove samo u levoj poluravni kompleksne s-ravni, vidi se da odziv iščezava sporije što su polovi bliže imaginarnoj osi. Ako sistem poseduje polove samo u levoj poluravni kompleksne s-ravni tada se par polova (ako su oni konjugovano kompleksni) koji je najbliži imaginarnoj osi naziva **dominantni par polova** jer dominantno (najviše) utiče na dužinu trajanja prelaznog procesa, odnosno tek nakon iščezavanja oscilacija usled njihovog dejstva sistem će ući u stacionarno stanje.

U dosadašnjem izlaganju se nigde ne pominje uticaj nula sistema na karakter odziva. Na njih se takođe mora obratiti pažnja, jer se delovanje nula i polova na međusobno malom rastojanju poništava, te delovanje polova u odzivu jednostavno iščezava.

## Greška rada SAU sa povratnom spregom, u stacionarnom stanju

Posmatra se sistem sa povratnom spregom, prikazan na slici 8.



Slika 8. Sistem sa povratnom spregom

Izlaz  $Y(s)$  je opisan jednačinom:

$$Y(s) = E_a(s)G(s) = G(s)[U(s) - H(s)Y(s)], \quad (31)$$

odakle je:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + GH(s)} U(s), \quad (32)$$

odnosno:

$$E_a(s) = \frac{1}{1 + GH(s)} U(s). \quad (33)$$

Pokretački signal u sistemu  $E_a(s)$  je u stvari mera greške  $E(s) = U(s) - Y(s)$ , i ako je  $H(s) = 1$ , tada je  $E_a(s) = E(s)$ , odnosno:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} U(s). \quad (34)$$

Greška rada sistema u stacionarnom stanju, prema izrazu (34) je:

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sU(s)}{1 + G(s)}. \quad (35)$$

Uobičajeno je, a i veoma korisno, da se  $e_{ss}$  određuje za tri standardna test signala oblika  $u(t) = At^n h(t)$ , gde je  $n = 0, 1, 2$ . Prvi je odskočni, drugi nagibni a treći parabolični signal.

### Odskočna pobuda

Neka su svi polovi ( $p_k$ ) i nule ( $z_i$ ) funkcije prenosa  $G(s)$  poznati. Pošto se posmatra sistem sa jediničnom negativnom povratnom spregom, na osnovu slike 8 se vidi da je  $G(s) = W(s)$ , odnosno funkcija prenosa  $G(s)$  je funkcija povratnog prenosa, te će se u daljem izlaganju pisati  $W(s)$  umesto  $G(s)$ . Neka  $W(s)$  poseduje  $r$  polova u koordinatnom početku (realni i

imaginarni deo ime je jednak nuli). Sada se  $W(s)$  može napisati u obliku:

$$W(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} = \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{s^r \prod_{k=1}^t (s+p_k)} \quad (36)$$

gde je  $r+t=n$ .  $r$  se naziva red astatizma i fizički predstavlja broj integratora u direktnoj grani sistema (funkciji prenosa  $G(s)$ ).

Za odskočnu pobudu  $u(t)=Ah(t) \Rightarrow U(s)=A/s$ , na osnovu izraza (35) sledi:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{A}{s}}{1+W(s)} = \frac{A}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} W(s)} \quad (37)$$

Sada se definiše konstanta položaja kao:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} W(s), \quad (38)$$

pa se izraz (37) može napisati u obliku:

$$e_{ss} = \frac{A}{1+K_p} \quad (39)$$

Na osnovu izraza (36) i (38) je:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{s^r \prod_{k=1}^t (s+p_k)}, \quad (40)$$

gde se može uočiti sledeće:

$$r=0 \Rightarrow K_p = \text{const.} < \infty \Rightarrow e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}, \quad (41)$$

$$r \geq 1 \Rightarrow K_p = \infty \Rightarrow e_{ss} = 0. \quad (42)$$

Na osnovu prethodnog izlaganja i izraza (41) i (42) se zaključuje da će sistem pobuđen odskočnim signalom raditi bez greške u stacionarnom ako poseduje minimalno astatizam prvog reda.

### Nagibna pobuda

Za nagibnu pobudu  $u(t)=Ath(t) \Rightarrow U(s)=A/s^2$ , na osnovu izraza (35) sledi:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{A}{s^2}}{1+W(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s+sW(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} sW(s)} \quad (43)$$

Sada se definiše brzinska konstanta kao:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s), \quad (44)$$

pa se izraz (43) može napisati u obliku:

$$e_{ss} = \frac{A}{K_v} \quad (45)$$

Na osnovu izraza (36) i (44) je:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{s^{r-1} \prod_{k=1}^n (s+p_k)}, \quad (46)$$

gde se može uočiti sledeće:

$$r=0 \Rightarrow K_v=0 \Rightarrow e_{ss}=\infty, \quad (47)$$

$$r=1 \Rightarrow K_v=\text{const.} < \infty \Rightarrow e_{ss} = \frac{A}{K_v}, \quad (48)$$

$$r \geq 2 \Rightarrow K_v = \infty \Rightarrow e_{ss} = 0. \quad (49)$$

Na osnovu prethodnog izlaganja i izraza (47) do (49) se zaključuje da će sistem pobuđen nagibnim signalom raditi bez greške u stacionarnom ako poseduje minimalno astatizam drugog reda.

### Parabolična pobuda

Za paraboličnu pobudu  $u(t)=At^2h(t)/2 \Rightarrow U(s)=A/s^3$ , na osnovu izraza (35) sledi:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot \frac{A}{s^3}}{1+W(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2+s^2W(s)} = \frac{A}{\lim_{s \rightarrow 0} s^2W(s)}. \quad (50)$$

Sada se definiše konstanta ubrzanja kao:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2W(s), \quad (51)$$

pa se izraz (50) može napisati u obliku:

$$e_{ss} = \frac{A}{K_a}. \quad (52)$$

Na osnovu izraza (36) i (51) je:

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\prod_{i=1}^m (s+z_i)}{s^{r-2} \prod_{k=1}^n (s+p_k)}, \quad (53)$$

gde se može uočiti sledeće:

$$r=0 \Rightarrow K_a=0 \Rightarrow e_{ss} = \infty, \quad (54)$$

$$r=1 \Rightarrow K_a=0 \Rightarrow e_{ss} = \infty, \quad (55)$$

$$r=2 \Rightarrow K_a=\text{const.} \Rightarrow e_{ss} = \frac{A}{K_a}, \quad (56)$$

Na osnovu prethodnog izlaganja i izraza (44) do (46) se zaključuje da će sistem pobuđen paraboličnim signalom imati beskonačno veliku grešku odziva za  $t \rightarrow \infty$ , ako je red astatizma manji od dva, a imaće konstantnu grešku za  $t \rightarrow \infty$  ako poseduje astatizam drugog reda.

Prethodno izlaganje se ilustruje tabelom 2.

Ulaz r	$u(t)=Ah(t)$ $U(s)=\frac{A}{s}$	$u(t)=Ath(t)$ $U(s)=\frac{A}{s^2}$	$u(t)=\frac{A}{2}t^2$ $U(s)=\frac{A}{s^3}$
0	$e_{ss} = \frac{A}{1+K_p}$	$e_{ss} = \infty$	$e_{ss} = \infty$
1	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{A}{K_v}$	$e_{ss} = \infty$
2	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = 0$	$e_{ss} = \frac{A}{K_a}$

Tabela 2.

## Indeksi performanse

U prethodnom izlaganju su uočeni i izvedeni parametri koji određene karakteristike sistema prevode u brojne vrednosti. Navedeni parametri su opisivali ponašanje sistema u prelaznom režimu i stacionarnom stanju. Broj tih parametara nije mali, pa se iz praktičnih razloga ukazala potreba za uvođenjem veličine (pokazatelja) koja će u sebi sadržati sve bitne dinamičke karakteristike sistema. Takve veličine se nazivaju indeksi performanse.

Definicija: Indeks performanse je kvantitativna mera osobine (performanse) sistema odabrana tako da što bolje istakne određenu (tehničku) karakteristiku.

Sistem se naziva optimalni SAU ako su njegovi parametri podešeni tako da indeks performanse dostiže ekstremnu vrednost (najčešće je to minimum). Indeksi performanse se najčešće zadaju u obliku integrala čija je pod integralna funkcija neka funkcija greške sistema. U daljem izlaganju će se definisati indeksi performanse najčešće korišteni u praksi.

Integral greške (Integral of Error):

$$IE = \int_0^T e(t) dt \quad (57)$$

Praktično se ne koristi jer daje loše rezultate za oscilatorne procese, zbog promene znaka greške (primer – srednja vrednost naizmenične struje je nula)

Integral kvadrata greške (Integral of Square Error):

$$ISE = \int_0^T e^2(t) dt \quad (58)$$

Gornja granica integrala  $T$  je izabrana kao vrednost kada iščezavaju sve prelazne pojave u sistemu i greška pada na nulu.  $T$  je najčešće vreme smirenja sistema ( $T_s$ ). Ovaj kriterijum ima jako velike vrednosti za sisteme sa ekstremno velikim ili ekstremno malim prigušenjem ( $\xi$ ), pa je njegova minimizacija uslovljena određivanjem nekog kompromisnog (srednjeg) rešenja za prigušenje. Ovaj indeks se lako meri (postoje kola za kvadriranje signala), a pogodan je i za matematičku, računarsku obradu. Slika 9 ilustruje postupak određivanja ISE.

Integral apsolutne greške (Integral of Absolute Error):

$$IAE = \int_0^T |e(t)| dt \quad (59)$$

Ovaj indeks se uglavnom koristi pri računarskim simulacijama ponašanja sistema.

Integral proizvoda apsolutne greške i vremena (Integral of Time multiplied Absolute Error):

$$ITAE = \int_0^T t \cdot |e(t)| dt \quad (60)$$

Definiše se da bi smanjio uticaj velike početne vrednosti greške (na početku posmatranja rada sistema) a podvukao (istakao) uticaj greške koju sistem ima kasnije u odzivu.

Integral proizvoda kvadrata greške i vremena (Integral of Time multiplied Square Error):

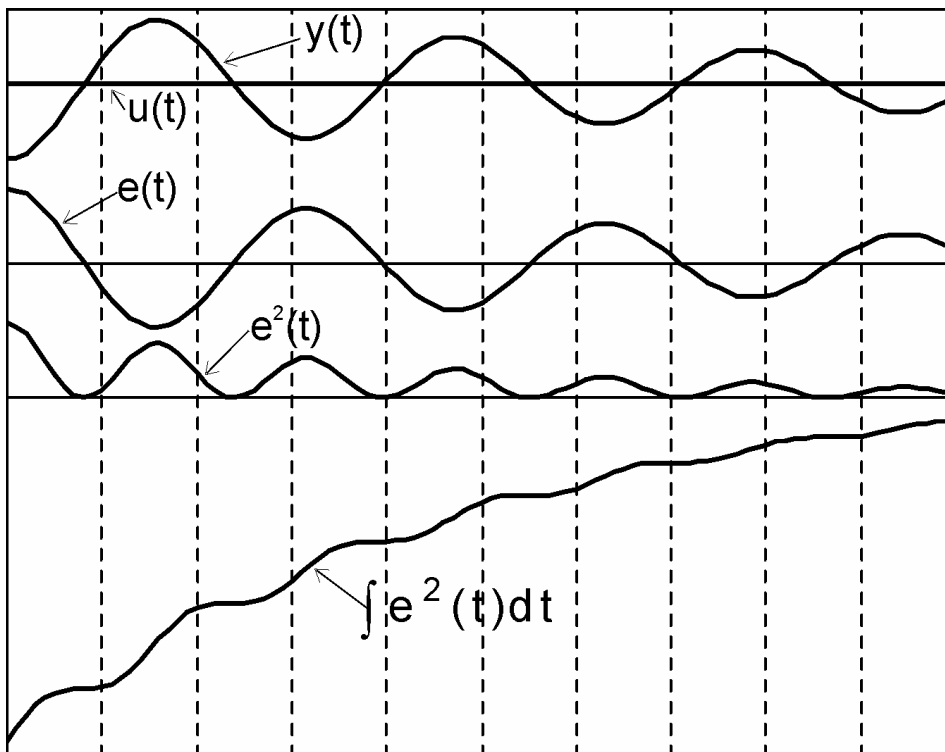
$$ITSE = \int_0^T t \cdot e^2(t) dt \quad (61)$$

Sličan je prethodnom indeksu (ITAE) i njihova zajednička osobina je dobra selektivnost, tako da se veoma lako uočava koji parametri sistema u kojoj meri utiču na njihovu minimizaciju.

Prethodno definisani indeksi performanse nisu i jedini koji se primenjuju, .i opšti oblik indeksa performanse bi se mogao napisati kao:

$$I = \int_0^T f(e(t), u(t), y(t), t) dt, \quad (62)$$

gde je  $f(.)$  funkcija koja zavisi od greške  $e(t)$ , ulaza u sistem  $u(t)$ , izlaza iz sistema  $y(t)$  i vremena  $t$ .



Slika 9. Način određivanja integrala kvadrata greške (ISE)