

Frekventne metode analize sistema automatskog upravljanja

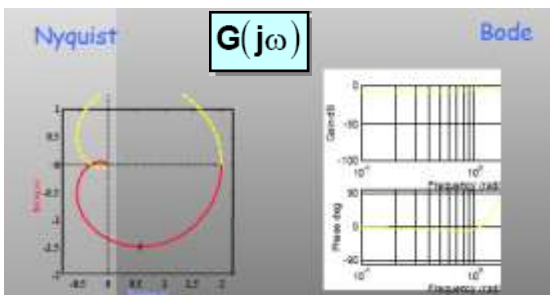
Prostoperiodična (PP) pobuda LTI sistema

Pored odskočne pobude pri ispitivanju linearnih sistema automatskog upravljanja se često primjenjuje i prostoperiodična, odnosno sinusna pobuda.

U okviru frekventnih metoda se analizira odziv sistema u stacionarnom stanju na prostoperiodičnu pobudu.

U okviru funkcije prenosa SAU $G(s)$, promjenljiva s se mijenja kompleksnom učestanošću $j\omega$, tako da se analizira funkcija prenosa sistema u frekventnom domenu $G(j\omega)$, gde je ω promenljiva učestanost pobudnog signala.

Frekventna karakteristika SAU



Frekventna karakteristika SAU

- $G(j\omega)$ se, kao i bilo koji drugi kompleksan broj, može predstaviti u eksponencijalnom obliku:

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j\text{Arg}\{G(j\omega)\}}$$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\text{Re}^2\{G(j\omega)\} + \text{Im}^2\{G(j\omega)\}},$$

$$\text{Arg}\{G(j\omega)\} = \arctg \frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}}.$$

Snimanje frekventne karakteristike



$$u(t) = U_0 \sin \omega t$$

$$y(t) = U_0 A \sin(\omega t + \phi)$$

$$u(t) = A_u \sin(\omega t + \phi_u) = A_u e^{j(\omega t + \phi_u)}$$

$$y(t) = A_y e^{j\omega t + \phi_y}$$

$$\frac{A_y}{A_u} = |G(j\omega)|,$$

$$\phi_y - \phi_u = \text{Arg}\{G(j\omega)\}.$$

Snimanje frekvencijske karakteristike



$$u(t) = U_0 \sin \omega t$$

$$y(t) = U_0 A \sin(\omega t + \phi)$$

Laplace

$$U(s) = U_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$Y(s) = U_0 \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} G(s)$$

$$Y(s) = \frac{\alpha_1}{s - a_1} + \frac{\alpha_2}{s - a_2} + \dots + \frac{\alpha_0}{s - j\omega} + \frac{\alpha_0^*}{s + j\omega}$$

$$Y(s) = \frac{\alpha_1}{s - a_1} + \frac{\alpha_2}{s - a_2} + \dots + \frac{\alpha_0}{s - j\omega} + \frac{\alpha_0^*}{s + j\omega}$$

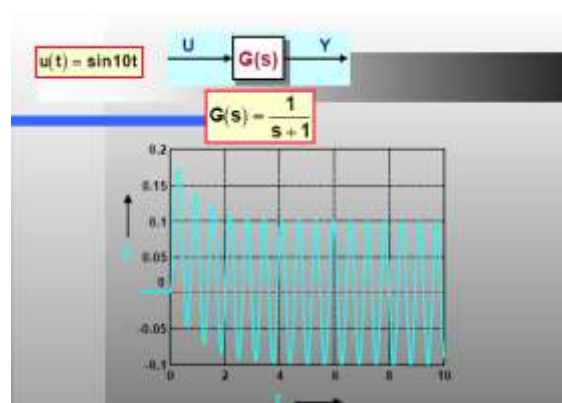
$$y(t) = \alpha_1 e^{-a_1 t} + \alpha_2 e^{-a_2 t} + \dots + 2|\alpha_0| \sin(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \text{arctg} \frac{\text{Im}(\alpha_0)}{\text{Re}(\alpha_0)}$$

$$y(t) = U_0 A \sin(\omega t + \phi)$$

$$A = \sqrt{[\text{Re}\{G(j\omega)\}]^2 + [\text{Im}\{G(j\omega)\}]^2}$$

$$\phi = \text{arctg} \frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}}$$



Odziv LTI sistema na PP funkciju

- Prethodni izrazi pokazuju da linearan sistem (LTI) pobuđen prostoperiodičnom pobudom, u stacionarnom stanju daje prostoperiodičan odziv iste učestanosti kao pobudni signal, ali **sa promenjenom amplitudom i faznim pomerajem**.
- Odnos amplituda ulaznog i izlaznog signala je jednak **modulu funkcije prenosa sistema za razmatranu učestanost ω** , a fazni pomeraj izlaznog u odnosu na ulazni signal je jednak **argumentu funkcije prenosa za razmatranu učestanost ω** .

AFFK sistema

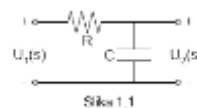
Teoretski, sa AFFK je moguće za proizvoljnu frekvenciju ω_x očitati kolika će biti promjena amplitude i fazni pomjeraj (kašnjenje) tog signala pri prolasku kroz razmatrani sistem. Praktično, veoma je teško (ako ne i nemoguće) očitati navedene podatke sa AFFK jer se za veće vrijednosti frekvencije tačke zgušnjavaju, a osim toga, frekvencija ω se pojavljuje kao parametar AFFK i teško je na crtežu fiksirati tačku koja odgovara tačno određenoj frekvenciji ω_x . Za očitavanje navedenih podataka praktično se koriste mnogo podesniji **Bodeovi dijagrami**.

AFFK sistema

Za različite ω će pojačanje i fazni pomeraj signala pri prolasku kroz sistem biti različito, odnosno za različite ω će vrednosti $|G(j\omega)|$ i $\text{Arg}\{G(j\omega)\}$ biti različite.

Promena $G(j\omega)$ pri promeni ω od $-\infty$ do ∞ se može predstaviti grafički, i ta kriva se naziva **amplitudno fazna frekventna karakteristika** (ili samo **frekventna karakteristika, AFFK**) sistema.

Primjer formiranja frekventne karakteristiku RC filtera prikazanog na slici 1.1.



Slika 1.1

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC+1} = \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_1}+1}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{RC}$$

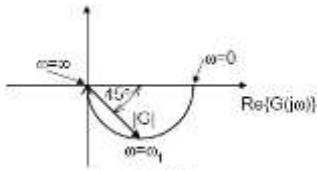
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} - j \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

Frekventna karakteristika RC filtera prikazanog na slici 1.1.

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}}$$

$$\text{Arg}\{G(j\omega)\} = -\arctg\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$$

ω	$\text{Re}\{G(j\omega)\}$	$\text{Im}\{G(j\omega)\}$	$ G(j\omega) $	$\text{Arg}\{G(j\omega)\}$
0	1	0	1	0
0.1 ω_1	0.99	0.1	0.995	-5.7°
0.5 ω_1	0.8	0.5	0.894	-26.6°
ω_1	0.5	0.5	0.707	-45°
10 ω_1	1·10 ⁻²	0.1	0.1	-84.3°
100 ω_1	1·10 ⁻⁴	1·10 ⁻²	0.01	-89.4°
∞	0	0	0	-90°



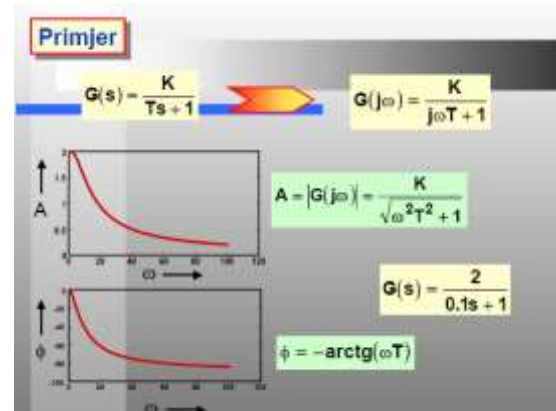
Bode-ovi dijagrami

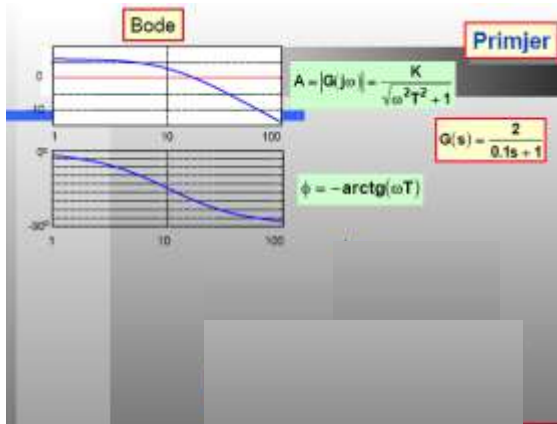
- Prvo se razdvajaju amplitudna i fazna frekventna karakteristika, odnosno na jednom dijagramu se crta zavisnost $|G(j\omega)|$ od promjenljive frekvencije ω , a na drugom zavisnost $\text{Arg}\{G(j\omega)\}$ od ω . Na taj način se dobijaju dva dijagrama sa kojih se direktno očitava vrijednost modula i faze funkcije prenosa sistema za određenu frekvenciju ω .
- Drugo, radi proširenja intervala frekvencija koje se razmatraju uvodi se logaritamska podjela na apscisi, tako da se umesto ω , a osi nezavisno promjenljive prikazuje $\log_{10}\omega$. Na taj način je moguće prikazati opseg od vrlo niskih (10^0 rad/sec) do vrlo visokih (10^9 rad/sec) učestanosti bez gubitka preciznosti crteža.

Bode-ovi dijagrami

- Konačno, radi dobijanja dio po dio linearne amplitudne karakteristike pogodno je i amplitudnu karakteristiku $|G(j\omega)|$ predstaviti pomoću logaritma osnove 10 (kao što je usvojeno predstavljanje ω preko njenog logaritma), tako da se sada $|G(j\omega)|$ izražava u decibelima (dB) i prema definiciji je:

$$|G(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}|G(j\omega)|.$$





Bode-ovi dijagrami

Ako se na apscisi nezavisno promenljive učestanosti prikazuje u raspodjeli $\log_{10}\omega$, a na ordinatama se nalazi prikaz:

$$a = 20 \log_{10}(|G(j\omega)|) \text{ i}$$

$$\phi = 180 + \text{Arg}\{G(j\omega)\},$$

dobijaju se dva grafikona koji se nazivaju **Bodeovi dijagrami**. Njihov praktični značaj i primjenljivost je veoma velika

Primjer Bodeovih dijagrama za RC filter sa slike 1.1

- Funkcija prenosa sistema je:

$$G(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{RCs + 1},$$

, a u frekventnom domenu je:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega RC + 1} = \frac{1}{j\omega T + 1},$$

gde je $T=RC$ (vremenska konstanta sistema).

- Moduo i argument $G(j\omega)$ su:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

$$\text{Arg}\{G(j\omega)\} = -\arctg(\omega T).$$

Bodeovi dijagrami za RC filter sa slike 1.1

Ako se $|G(j\omega)|$ izrazi u decibelima, izraz postaje:

$$|G(j\omega)|_{\text{db}} = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} = -10 \log (1 + (\omega T)^2).$$

Iz poslednjeg izraza se vidi da je za male frekvencije $\omega \ll 1/T$ ($\omega T \ll 1$):

$$|G(j\omega)|_{\text{db}} = -10 \log 1 = 0 \text{db}; \omega \ll 1/T$$

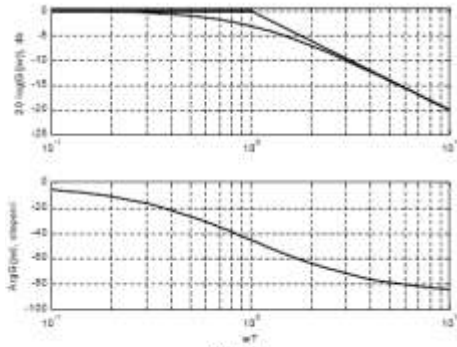
odnosno da je za velike frekvencije $\omega \gg 1/T$ ($\omega T \gg 1$):

$$|G(j\omega)|_{\text{db}} = -20 \log \omega T; \omega \gg 1/T.$$

a da je za $\omega = 1/T$ ($\omega T = 1$):

$$|G(j\omega)|_{\text{db}} = -10 \log 2 = -3.01 \text{db}; \omega = 1/T.$$

Bodeovi dijagrami za RC filter sa slike 1.1



Očitavanje konstanti greške sa Bode-ovih dijagrama

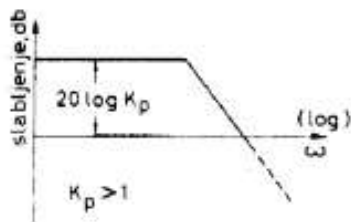
$$K_p = \lim_{\omega \rightarrow 0} W(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} K \frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = K, \text{ ako je red astatizma } r=0;$$

$$K_v = \lim_{\omega \rightarrow 0} j\omega W(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} K \frac{P(j\omega)}{j\omega Q(j\omega)} = K, \text{ ako je red astatizma } r=1;$$

$$K_a = \lim_{\omega \rightarrow 0} (j\omega)^2 W(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} K \frac{P(j\omega)}{(j\omega)^2 Q(j\omega)} = K, \text{ ako je red astatizma } r=2.$$

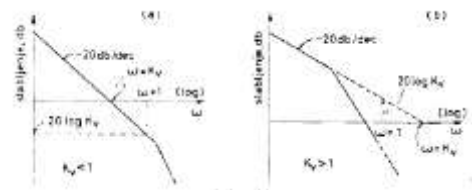
1. Konstanta položaja K_p

Početni segment amplitudne karakteristike sistema bez astatizma ($r=0$) je $20\log K$, i to je upravo vrednost K_p izražena u decibelima



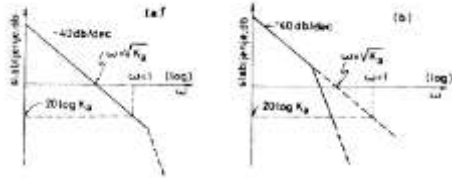
• 2. Brzinska konstanta K_v

- Početni segment amplitudne karakteristike sistema sa astatizmom prvog reda ($r=1$) je $20\log K - 20\log \omega$. Rešavanjem jednačine $20\log K - 20\log \omega = 0$ se dobija da je $K = \omega$. To znači da je brzinska konstanta jednaka vrednosti frekvencije ω za koju početni segment Bodeovog amplitudnog dijagrama siječe apscisu. Sa dijagrama se ova vrijednost očitava tako da se prvi segment karakteristike produži do preseka sa ω -osom i očitava se vrijednost presječne tačke, kako je prikazano na slici

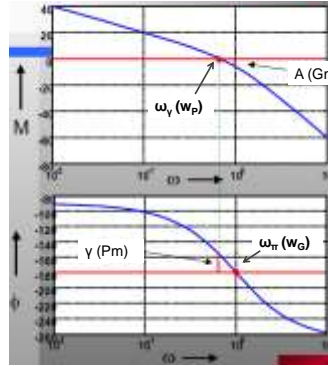


2. Konstanta ubrzanja Ka

Početni segment amplitudne karakteristike sistema sa astatizmom drugog reda (r=2) je $20\log K-40\log\omega$. Rešavanjem jednačine $20\log K-40\log\omega=0$ se dobija da je $K=\omega^2$. To znači da je brzinska konstanta jednaka kvadratu vrijednosti frekvencije ω za koju početni segment Bodeovog amplitudnog dijagrama siječe apscisu. Sa dijagrama se ova vrijednost očitava tako da se prvi segment karakteristike produži do presjeka sa ω -osom, očita se vrijednost presječne tačke i izračuna vrijednost njenog kvadrata, kako je prikazano na slici



Karakteristične veličine koje se očitavaju sa Bode-ovih dijagrama

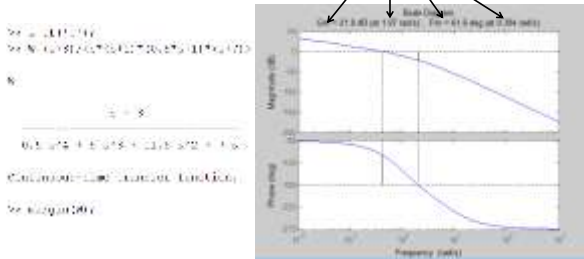


- Pretek pojačanja – **A (Gm)**
- Učestanost preteka pojačanja – **ω_π (Wg)**
- Pretek faze - **γ (Pm)**
- Učestanost preteka faze – **ω_ν (Wp)**
- F-je u MATLABU:
 - **bode**
 - **margin**

Primjer očitavanja karakterističnih veličina sa Bode-ovih dijagrama

SAU je dat f-jom povratnog prenosa: $W(s) = \frac{(s+3)}{s(s+1)(0,5s+1)(s+7)}$

Određiti karakteristične vrijednosti SAU-a (Kv, Gm, Wg, Pm, Wp)



Primjena Bode-ovih dijagrama za određivanje relativne stabilnosti sistema

Bode-ovi dijagrami su veoma prikladni za analizu i sintezu sistema upravljanja.

- * vrlo je jasan uticaj parametara sistema na stabilnost sistema;
- * relativno je jednostavno povezati frekvencijske karakteristike otvorenog sistema s vremenskim ponašanjem zatvorenog sistema upravljanja.

- Da bi **zatvoreni sistem** bio stabilan potrebno je da:
 - A (Gm) > 0 dB** i **γ (Pm) > 0° (deg)**
- Što su preteci veći to je sistem stabilniji, tj. dalje od granice stabilnosti .

Zaključak

- Za razliku od algebarskih postupaka (Routh, Hurwitz) frekvencijski postupak analize stabilnosti omogućuje analizu relativne stabilnosti, tj. daje odgovor na pitanje koliko je sistem daleko od granice stabilnosti.
- Frekvencijski postupci omogućuju analizu uslovno stabilnih SAU.
- Vrlo često se projektovanje kompenzatora i regulatora (sinteza SAU) vrši pomoću Bode-ovih dijagrama.