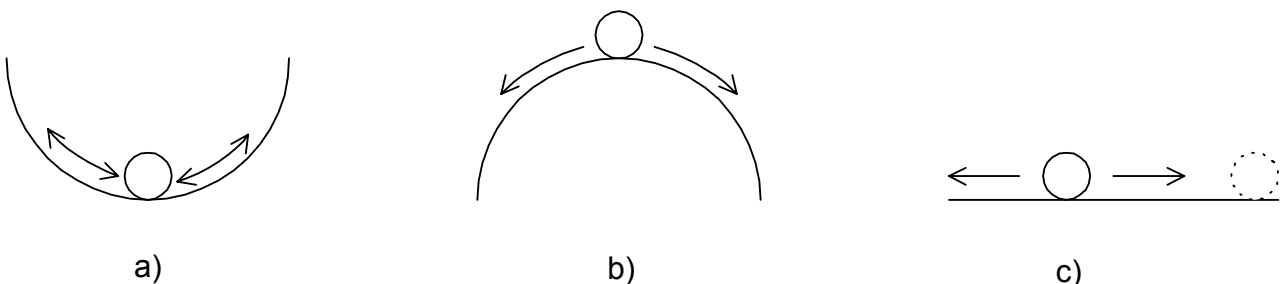


## Stabilnost linearnih sistema automatskog upravljanja

Najvažnija osobina SAU jeste stabilnost. Generalni zahtev koji se postavlja pred projektanta jeste da projektovani i realizovani SAU bude stabilan (u praksi postoje izuzeci, ali to izlazi van okvira ovog kursa).

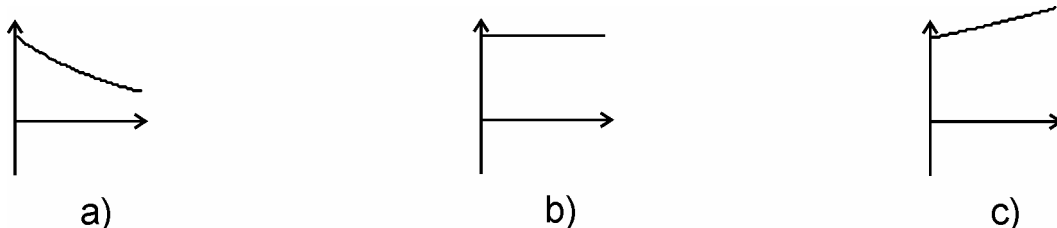
Posmatrajući sistem sa i bez povratne sprege moguće su različite situacije. Moguće je da sistem sa otvorenom povratnom spregom bude nestabilan, a da postane stabilan nakon zatvaranja povratne sprege. Moguća je obrnuta situacija (pojava mikrofonije – zatvaranje pozitivne povratne sprege), a moguće je da sistem pre i posle zatvaranja povratne sprege bude stabilan (ili nestabilan). Zatvaranjem povratne sprege pored stabilnosti sistema, mogu se podešavati i druge osobine kao što su tačnost rada sistema u stacionarnom stanju, brzina odziva, preskok, oscilatornost odziva i sl.

Osnovna podela sistema prema stabilnosti jeste na stabilne i nestabilne sisteme, i tu se govori o osobini apsolutne stabilnosti. Kod stabilnih sistema je moguće odrediti i stepen (ili rezervu) stabilnosti tako da se dolazi do pojma relativne stabilnosti. Sistemi se mogu upoređivati prema stepenu stabilnosti, tako da mogu biti relativno stabilniji ili manje stabilni. Interesantna je činjenica da su stabilniji sistemi teži za upravljanje zbog sporijeg reagovanja (odziva) od manje stabilnih. Pored apsolutno stabilnih i nestabilnih sistema (često se ovo "apsolutno" izostavlja) postoje i granični slučajevi – neutralne ili granične stabilnosti. To su sistemi koji ne spadaju ni u jednu grupu ranije definisanih, ali najčešće za male promene parametara prelaze ili u stabilne ili u nestabilne sisteme. Jedna od definicija stabilnosti bi mogla biti: **stabilan sistem je dinamički sistem koji na ograničenu (konačnu) pobudu daje ograničen (konačan) odziv**. Ovo bi se moglo ilustrovati primerom kuglice, prikazanim na slici 1. Stabilnost dinamičkih sistema se može posmatrati na isti način kao i kuglica. Odziv sistema zavisi od početnih uslova i delovanja pobude, i može biti opadajući (slika 1a), rastući (slika 1b) ili neutralan (slika 1c) po svojoj amplitudi. Na slici 1a) je prikazan stabilan sistem, na slici 1b) nestabilan, a na 1c) granično (neutralno) stabilan.



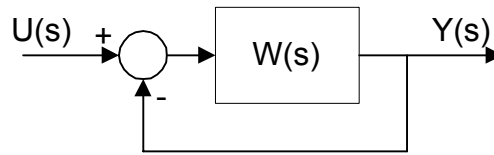
Slika 1.

Ako se kao pobuda u sistemu posmatra  $\delta(t)$ , koja je konačna pobuda (iščezava tokom vremena) tada se odzivi dinamičkog sistema mogu predstaviti slikom 2, gde je sistem prikazan na slici 2a) stabilan, 2b) granično stabilan i 2c) nestabilan.



Slika 2

Osobina stabilnosti je u tesnoj vezi sa položajem polova dinamičkog sistema u kompleksnoj s-ravni. Posmatra se elementarna upravljačka struktura, prikazana na slici 3.



Slika 3. Elementarna upravljačka struktura sa jediničnom negativnom povratnom spregom

Neka je:

$$W(s) = K \cdot \frac{P_m(s)}{Q_n(s)}, \quad (1)$$

gde je  $n \geq m$ . Funkcija spregnutog prenosa je:

$$W_s(s) = \frac{W(s)}{1+W(s)} = \frac{KP_m(s)}{KP_m(s)+Q_n(s)}. \quad (2)$$

Karakteristična jednačina je:

$$KP_m(s)+Q_n(s)=0, \quad (3)$$

i na osnovu rešenja karakteristične jednačine  $s_i, i=1,2,\dots,n$  izraz (2) se može napisati u obliku:

$$W_s(s) = \frac{KP_m(s)}{\prod_{i=1}^n (s-s_i)}. \quad (4)$$

Ako je  $p$  polova realno i prosto i  $r$  pari polova konjugovano kompleksno ( $p+2r=n$ ), impulsni odziv sistema je:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^p \frac{A_i}{s+\sigma_i} + \sum_{k=1}^r \frac{B_k s + C_k}{s^2 + 2\alpha_k s + (\alpha_k^2 + \omega_k^2)}, \quad (5)$$

gde su:  $s_i = -\sigma_i$  realni polovi,  $s_{k1,2} = -\alpha_k \pm j\omega_k$  kompleksni, a  $A_i, B_k$  i  $C_k$  konstante. Primenom inverzne Laplace-ove transformacije izraz (5) prelazi u vremenski domen, pa je:

$$y(t) = \sum_{i=1}^p A_i e^{-\sigma_i t} + \sum_{k=1}^r D_k e^{-\alpha_k t} \sin(\omega_k t + \phi_k), \quad (6)$$

gde su  $D_k$  konstante koje zavise od  $B_k, C_k, \alpha_k$  i  $\omega_k$ . Iz poslednjeg izraza se vidi da će uslov:

$$y_{ss} = y(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0, \quad (7)$$

Biti zadovoljen ako i samo ako je  $\forall(-\sigma_i) < 0$  i  $\forall(-\alpha_k) < 0$ , odnosno ako svi polovi sistema imaju realan deo manji od nule (slika 4). Daljom analizom se dolazi do sledećih zaključaka:

- Ako  $\exists \sigma_q = 0 \wedge \forall(-\sigma_i) < 0$ , gde je  $i \neq q$  i  $\forall(-\alpha_k) < 0 \Rightarrow y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = A_q$ . Odziv sistema je

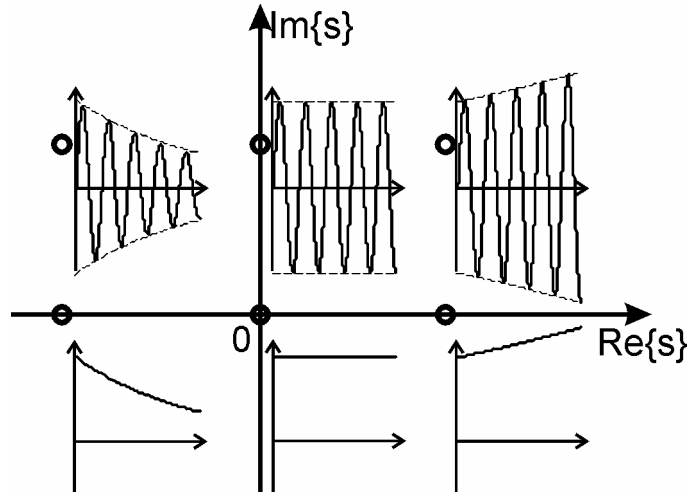
konstantan u stacionarnom stanju ( $A_q$ ). Jedan pol sistema se nalazi u koordinatnom početku a svi ostali u levoj poluravni kompleksne s-ravni, i sistem se nalazi na aperiodičnoj granici stabilnosti (slika 4).

- Ako  $\exists \alpha_v = 0 \wedge \forall(-\sigma_i) < 0$  i  $\forall(-\alpha_k) < 0$ , gde je  $k \neq v \Rightarrow y_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = D_v \sin(\omega_v t + \phi_v)$ . Odziv

sistema u stacionarnom stanju je oscilatoran sa konstantnom amplitudom ( $D_v \sin(\omega_v t + \phi_v)$ ). Postoji par konjugovano kompleksnih polova sistema na imaginarnoj

osi ( $\alpha_v = \pm j\omega_v$ ) a svi ostali u levoj poluravni kompleksne s-ravni, i sistem se nalazi na oscilatornoj granici stabilnosti (slika 4).

- Ako  $\exists(-\sigma_i) > 0 \vee \exists(-\alpha_k) > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \infty$ . Odziv sistema odlazi u beskonačnost, za  $t \rightarrow \infty$ . Postoji bar jedan pol sistema u desnoj poluravni kompleksne s-ravni i sistem je nestabilan (slika 4).



Slika 4.

Na osnovu prethodno navedenog zaključuje se da će sistem biti stabilan ako poseduje sve polove u levoj poluravni kompleksne s-ravni. Ako poseduje bar jedan pol u koordinatnom početku i/ili par polova na imaginarnoj osi, dok se svi ostali polovi nalaze u levoj poluravni kompleksne s-ravni sistem je granično stabilan. Ako sistem poseduje bar jedan pol (ili par konjugovano kompleksnih polova) u desnoj poluravni kompleksne s-ravni, bez obzira na broj polova u levoj poluravni, koordinatnom početku ili imaginarnoj osi, sistem je nestabilan. Na osnovu ovog izlaganja se vidi da kompletnu informaciju o stabilnosti nosi karakteristični polinom sistema. Na osnovu karakterističnog polinoma se formira karakteristična jednačina (3) čija su rešenja polovi sistema. Analizom prirode polova se utvrđuje stabilnost sistema. Rešavanje jednačine (3) nekada može biti prilično komplikovano (rešavanje algebarske jednačine višeg reda) pa se postavlja pitanje: da li se stabilnost sistema može ispitati bez eksplicitnog rešavanja karakteristične jednačine? Može, i u tu svrhu se koriste kriterijumi stabilnosti. Dva algebarska kriterijuma stabilnosti koja će se detaljnije obratiti su kriterijumi Routh-a i Hurwitz-a.

## Algebarski kriterijumi stabilnosti Routh-a i Hurwitz-a.

Posmatra se karakteristična jednačina sistema:

$$f(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0, \quad (8)$$

(uobičajena oznaka za karakteristični polinom je  $f(s)$ , pa će se ona nadalje i koristiti).

Nakon rešavanja jednačine (8), polinom  $f(s)$  se može napisati u faktorizovanom obliku:

$$f(s) = a_n (s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n) = 0, \quad (9)$$

gde je  $p_i$  i-ti ( $i=1, 2, \dots, n$ ) pol sistema. Množenjem činilaca jednačine (9) se dobija:

$$f(s) = a_n s^n - a_n (p_1 + p_2 + \dots + p_n) s^{n-1} + a_n (p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2 p_3 + \dots) s^{n-2} - a_n (p_1 p_2 p_3 + p_1 p_2 p_4 + \dots) s^{n-3} + \dots + a_n (-1)^n p_1 p_2 \dots p_n = 0. \quad (10)$$

Prema poslednjem izrazu se vidi da će svi koeficijenti  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$  biti istog znaka ako su svi  $\text{Re}\{p_i\} < 0$ , pa se dolazi do zaključka da je potreban uslov stabilnosti sistema da svi koeficijenti karakterističnog polinoma budu istog znaka (najčešće se to "istog znaka" poistovećuje sa "pozitivni"). Ovo je, nažalost, i dovoljan uslov samo za sisteme prvog i

drugog reda, dok se za sisteme višeg reda moraju vršiti i dodatna ispitivanja.

Sistem prvog reda:  $a_1s+a_0=0 \Rightarrow s = -\frac{a_0}{a_1}$ , pa je  $s < 0$  ako su  $a_0$  i  $a_1$  istog znaka.

Sistem drugog reda:  $a_2s^2+a_1s+a_0=0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}$ , i neka su  $a_2, a_1, a_0 > 0$ .

Ako je  $a_1^2 \geq 4a_2a_0 \Rightarrow s_{1,2} < 0$ , odnosno ako je  $a_1^2 < 4a_2a_0 \Rightarrow \text{Re}\{s_{1,2}\} < 0$ . Vidi se da će sistem imati polove sa negativnim realnim delovima ako su svi koeficijenti karakterističnog polinoma istog znaka.

Kod sistema višeg reda mora se primeniti neki od kriterijuma za ispitivanje stabilnosti. Takva dva algebarska kriterijuma su nezavisno jedan od drugog postavili početkom XIX veka Routh i Hurwitz. Kriterijumi su bili postavljeni sa ciljem da se odredi priroda rešenja karakteristične jednačine (8) (znak realnog dela svih rešenja jednačine) bez rešavanja iste.

Routh-ov kriterijum: Posmatra se karakteristična jednačina (8) i na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma  $f(s)$  se formira Routh-ova šema koeficijenata kako je to pokazano tabelom 1 (šema se sastoji iz  $n+1$  vrste):

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	...
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	...
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	...
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	...
⋮				
$s^0$	$h_1$			

Tabela 1. Routh-ova šema koeficijenata

Prve dve vrste Routh-ove šeme koeficijenata se sastoje od koeficijenata karakterističnog polinoma, dok se elementi počevši od treće vrste pa do kraja izračunavaju na sledeći način:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

⋮

Kada je šema formirana, posmatra se prva kolona – Routh-ova kolona. Sada važi teorema: broj korena algebarske jednačine koji imaju pozitivne realne delove, jednak je broju promena znaka elemenata u Routh-ovoj koloni. Na osnovu prethodnog može se definisati Routh-ov kriterijum stabilnosti: **potreban i dovoljan uslov da bi sistem bio stabilan jeste da svi elementi Routh-ove kolone, formirane na osnovu koeficijenata karakterističnog polinoma, budu istog znaka** (što se najčešće svodi na “pozitivni”). Sistem će biti granično stabilan ako se u Routh-ovoj koloni pored koeficijenata istog znaka

pojavljaju i nule. Broj granično stabilnih polova je jednak broju prelaza sa nenulnih na nulte vrednosti i obrnuto.

Primer R1: Ispitati stabilnost sistema sa karakterističnim polinomom  $f(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24$ .

Rešenje: Formira se Routh-ova šema koeficijenata:

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 2 \\
 s^2 & 1 & 24 \\
 s^1 & \frac{1 \cdot 2 - 1 \cdot 24}{1} = -22 & 0 \\
 s^0 & \frac{-22 \cdot 24 - 1 \cdot 0}{-22} = 24 & 
 \end{array}$$

Routh-ova kolona je:

$$\begin{array}{c|c}
 1 \\
 1 \\
 -22 \\
 24
 \end{array}$$

U Routh-ovoj koloni postoje pozitivni i negativni elementi što znači da je sistem nestabilan. Postoje 2 promene znaka ( $1 \rightarrow -22$  i  $-22 \rightarrow 24$ ) što znači da sistem poseduje dva pola sa pozitivnim realnim delom (polovi sistema su:  $-3$  i  $1 \pm j2.65$ ).

Primer R2: Ispitati stabilnost sistema sa karakterističnim polinomom

$$f(s) = s^5 + 2s^4 + s^3 + 3s^2 + 4s + 5.$$

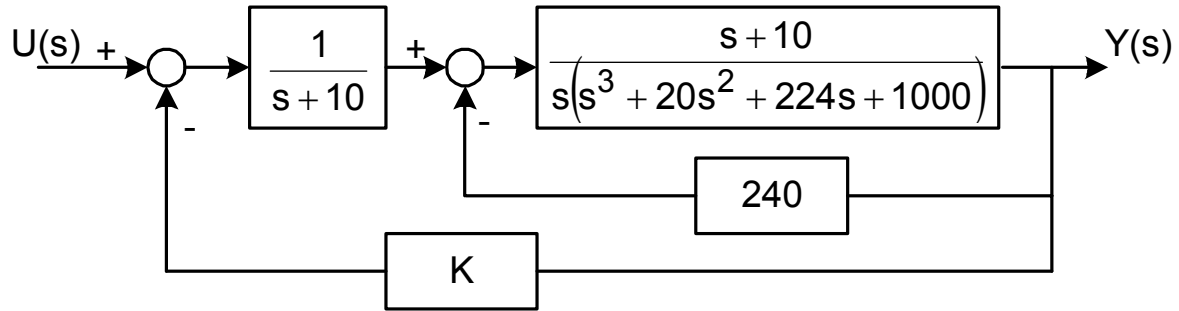
Rešenje: Formira se Routh-ova šema koeficijenata:

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^5 & 1 & 1 & 4 \\
 s^4 & 2 & 3 & 5 \\
 s^3 & \frac{1}{2} (-1) & \frac{3}{2} (3) & \\
 s^2 & 9 & 5 & \\
 s^1 & \frac{32}{9} (32) & & \\
 s^0 & 5 & & 
 \end{array}$$

Elementi u zagradama se dobijaju ako se vrsta pomnoži najmanjim zajedničkim sadržiocem imenilaca elemenata vrste. Tokom formiranja Routh-ove šeme koeficijenata dozvoljeno je vrstu pomnožiti proizvoljnim pozitivnim brojem, što je ovde i iskorišteno. To se čini u cilju eliminacije razlomaka i olakšavanja daljeg računanja.

U Routh-ovoj koloni postoje pozitivni i negativni elementi što znači da je sistem nestabilan. Postoje 2 promene znaka ( $2 \rightarrow -1$  i  $-1 \rightarrow 9$ ) što znači da sistem poseduje dva pola sa pozitivnim realnim delom (polovi sistema su:  $-2.05$ ,  $-0.71 \pm j0.89$  i  $0.73 \pm j1.16$ ).

**Primer.** SAU je prikazan blok dijagramom na slici. Odrediti interval pojačanja  $K$  za koji je sistem stabilan.



**Rešenje.** Funkcija spregnutog prenosa sistema je

$$W(s) = \frac{1}{s^4 + 20s^3 + 224s^2 + 1240s + 2400 + K}$$

Karakteristični polinom sistema je:  $f(s) = s^4 + 20s^3 + 224s^2 + 1240s + 2400 + K$ . Rausova šema koeficijenata je:

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 224 & 2400+K \\ s^3 & 20 & 1240 & \\ s^2 & 162 & 2400+K & \\ s^1 & 7644-K & & \\ s^0 & 2400+K & & \end{array}$$

Da bi sistem bio stabilan svi elementi Rausove kolone moraju biti istog znaka, što se svodi na uslov:

$$7644-K > 0 \wedge 2400+K > 0 \Rightarrow -2400 < K < 7644.$$

**Primer.** Funkcija spregnutog prenosa SAU je  $W(s) = \frac{3s^2+2}{s^5+s^4+as^3+bs^2+s+1}$ , gde su  $a$  i  $b$

realni pozitivni parametri. Odrediti vrednosti parametara  $(a,b)$  za koje će sistem biti stabilan.

**Rešenje.** Karakteristični polinom sistema je:  $f(s) = s^5+s^4+as^3+bs^2+s+1$ . Rausova šema koeficijenata je:

$$\begin{array}{c|ccc} s^5 & 1 & a & 1 \\ s^4 & 1 & b & 1 \\ s^3 & a-b & 0 & \\ s^2 & b & 1 & \\ s^1 & \frac{b-a}{b} & & \\ s^0 & 1 & & \end{array}$$

Da bi sistem bio stabilan svi elementi Rausove kolone moraju biti istog znaka, što se svodi na uslove:  $a > b \wedge b > a$  što je kontradikcija, tako da ni za jednu vrednost parametara  $a$  i  $b$  sistem nije stabilan.

**Primer.** Funkcija spregnutog prenosa SAU je  $W(s) = \frac{3s+4}{s^5+3s^4+5s^3+5s^2+2s+K}$ , gde je  $K$  realan parametar. Odrediti interval vrednosti parametra  $K$  za koji će sistem biti stabilan.

**Rešenje.** Karakteristični polinom sistema je:  $f(s) = s^5+3s^4+5s^3+5s^2+2s+K$ . Rausova šema koeficijenata je:

$$\begin{array}{l|ll} s^5 & 1 & 5 & 2 \\ s^4 & 3 & 5 & K \\ s^3 & 10 & 6-K & \\ s^2 & 32+3K & 10K & \\ s^1 & 192-114K-3K^2=64-38K-K^2 & & \\ s^0 & K & & \end{array}$$

Uslov stabilnosti sistema:

$K > 0$  (oblast desno od  $f(k)$ -ose na slici)

$32+3K > 0 \Rightarrow K > -\frac{32}{3} = -10,67$  (oblast desno od prave  $K = -10,67$ )

$64-38K-K^2 > 0 \Rightarrow -39,6 < K < 1,6$  (oblast ispod parabole  $64-38K-K^2 = 0$ , a iznad  $K$ -ose)  
Objedinjavanjem gornjih uslova dobija se uslov stabilnosti sistema  $0 < K < 1,6$ . Oblast stabilnosti je osenčena na slici.

