Matematički modeli sistema

U analizi i sintezi SAU se koriste kvantitativni matematički modeli koji opisuju fiziku sistema. Generalno, dinamika sistema je opisana običnim diferencijalnim jednačinama. Klasa sistema koja će se proučavati u toku ovog kursa su: kontinualni, linearni, stacionarni sistemi sa koncentrisanim parametrima. Takvi sistemi se opisuju sistemima linearnih diferencijalnih jednačina sa konstantnim koefeicijentima.

Obzirom da je veliki broj fizičkih sistema nelinearan, u okviru ove teme će se govoriti i o linearizaciji, koja omogućava primenu Laplasove transformacije (Laplace). Takođe, biće reči i o Laplasovoj transformaciji kao veoma korisnom alatu za rešavanje problema opisanih diferencijalnim jednačinama. Obradiće se relacije ulaz-izlaz (RUI) i funkcija prenosa sistema, a u okviru grafičkih metoda predstavljanja sistema blok dijagram, graf toka signala i njihove transformacije (simplifikacija, uprošćavanje).

Uvod

Da bi se razumela dinamika i projektovalo upravljanje za neki kompleksan sistem prvo mora biti poznat njegov matematički model. Pošto su razmatrani sistemi u prirodi dinamički, za njihovo opisivanje se koriste sistemi diferencijalnih jednačina (DJ). Pri rešavanju sistema diferencijalnih jednačina pogodno je koristiti Laplasovu transformaciju (LT) koja pojednostavljuje određivanje rešenja. Ukoliko je SAU opisan sistemom nelinearnih DJ pre primene LT je potrebno izvršiti linearizaciju. U praksi, sistemi koji se razmatraju mogu biti veoma komplikovani, ili njihova priroda nije u potpunosti poznata te je u procesu modelovanja potrebno uvesti (usvojiti) određene pretpostavke, zanemarenja i uprošćenja.

Nakon završenog modelovanja SAU je opisan sistemom linearnih DJ. Na kraju se na osnovu postavljenog modela, primenom LT, određuje ponašanja sistema u različitim uslovima i za različite pobude.

Analiza dinamičkih sistema se prema dosad navednom može raščlaniti na sledeće korake:

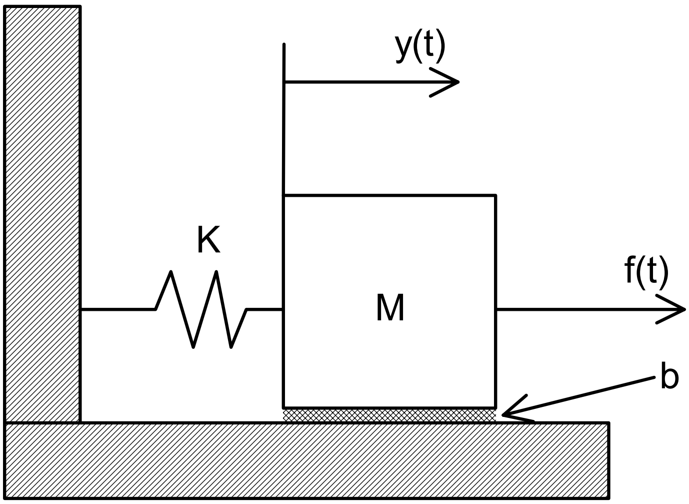
1. Definisanje sistema i njegovih komponenti;
2. Formulisanje matematičkog modela uz nabrajanje usvojenih pretpostavki;
3. Pisanje sistema DJ koji opisuje model (sistem);
4. Rešavanje postavljenog sistema jednačina po željenim izlaznim promenljivima;
5. Provera tačnosti rešenja i usvojenih pretpostavki;
6. Ako je potrebno, ponovo proanalizirati sistem i ponovo formulisati model.

Opisivanje fizičkih sistema diferencijalnim jednačinama

Diferencijalne jednačine koje opisuju pojedine sisteme se postavljaju na osnovu fizičkih zakona koji opisuju pojedine procese. Ovakav pristup se jednako primenjuje na mehaničke, električne, hidro, pneumatske i termodinamičke sisteme.

U nekim slučajevima se fizički različite pojave opisuju jednačinama istog oblika i tada se uspostavljaju analogije. Sledeći primer će pokazati uspostavljanje elektro - mehaničkih analogija.

Primer
Posmatra se mehanički sistem na slici 1.



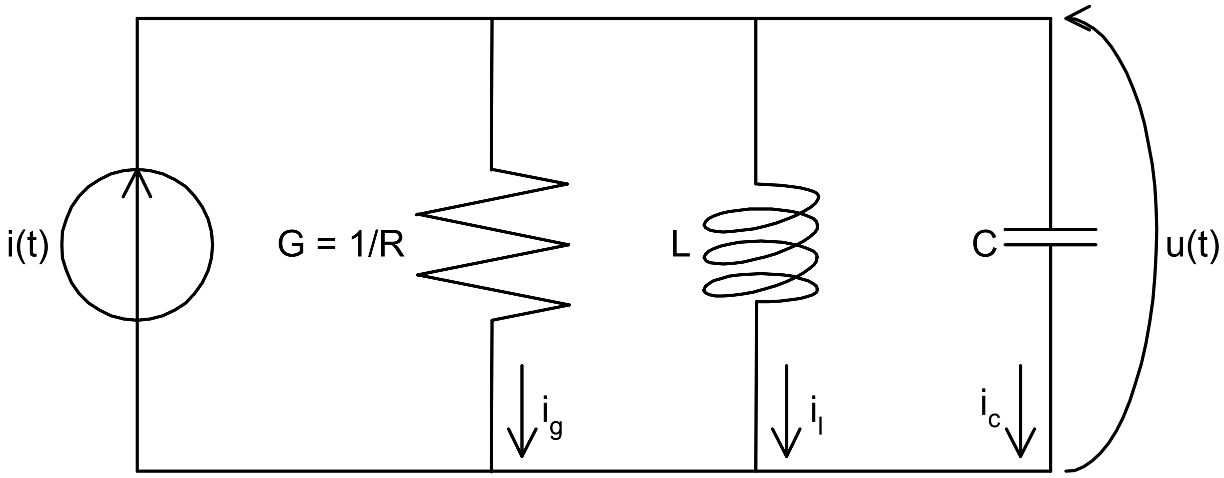
Slika 1.

Sila f(t) vuče telo mase M u desno, pri čemu se telo pomera i njegov se položaj, y(t), menja. Ovom kretanju se odupiru sledeće sile: sila u opruzi nastala usled stezanja (proporcionalna koeficijentu krutosti K), inercija tela (proporcionalna masi M) i trenje o podlogu (proporcionalno koeficijentu trenja b). Ako se ovo izrazi matematički, sledi jednačina

$$f(t) = M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) \qquad (1)$$

Izraz (1) je diferencijalna jednačina koja opisuje dinamiku posmatranog sistema.

Dalje, posmatra se električno kolo prikazano na slici 2.



Slika 2.

Električno kolo sa slike 2 se može opisati sledećim izrazom

$$i(t) = i_g + i_l + i_c = Gu(t) + \frac{1}{L}\int_0^t u(t)dt + I_{L0}^{0} + C\frac{du(t)}{dt}$$

Pošto je: $u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt}$, prethodni izraz se može napisati

$$i(t) = C\frac{d^2\Psi(t)}{dt^2} + G\frac{d\Psi(t)}{dt} + \frac{i}{L}\Psi(t). \tag{2}$$

Ako se posmatraju jednačine (1) i (2) vidi se da su one istog oblika, iako opisuju fizički različite pojave (sisteme). Na osnovu **istog oblika jednačina** uspostavljaju se sledeće analogije:

Mehaničke veličine		Električne veličine
sila f(t)	$\leftrightarrow$	struja i(t)
položaj y(t)	$\leftrightarrow$	fluks Ψ(t)
masa M	$\leftrightarrow$	kapacitivnost C
trenje b	$\leftrightarrow$	provodnost G
krutost (elastičnost) K	$\leftrightarrow$	recipročna vrednost induktivnosti 1/L

Jednačine (1) i (2) se mogu rešiti nekom od metoda za rešavanje DJ (metoda neodređenih koeficijenata).

Neka je za DJ (1) $y(t_0)=Y(0)=0$ i $f(t)=F=const.$, tada je rešenje

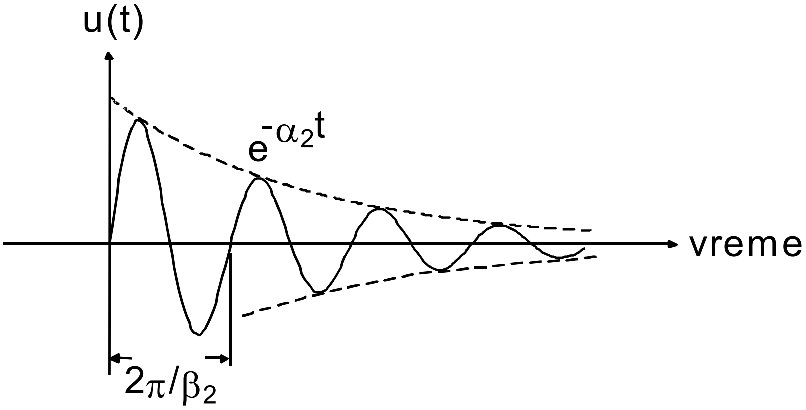
$$y(t) = K_1e^{-\alpha_1 t}\sin(\beta_1 t + \theta_1), \tag{3}$$

gde su K_1, α_1, β_1 i θ_1 koeficijenti koje treba odrediti.

Za rešenje jednačine (2), uz uslove: $u(t_0)=0$ i $i(t)=I=const.$, se dobija:

$$u(t) = K_2e^{-\alpha_2 t}\sin(\beta_2 t + \theta_2) \tag{4}$$

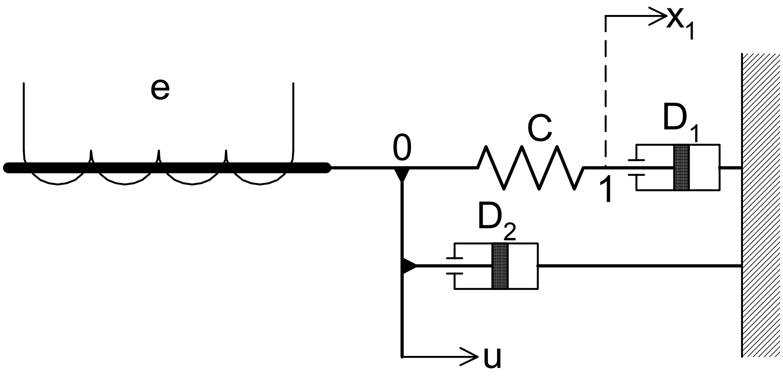
gde su K_2, α_2, β_2 i θ_2 koeficijenti koje treba odrediti. Grafički se rešenje može predstaviti krivom na slici 3, i prokomentarisati na sledeći način. Za $t \to \infty$, $u(t) \to 0$, odnosno nema napona na kalemu, otporniku i kondenzatoru. Kako se to objašnjava? Za kalem je konstitutivna relacija $u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$. Ako je i(t)=const, tada je $u_l=0$, odnosno kalem će se ponašati kao kratak spoj. Iz tog razloga struja ne teče kroz otpornik ($u_r=0$), a ako je kondenzator ranije bio napunjen ispazniće se kroz kratak spoj ($u_c=0$).



Slika 3.

Primer

Na slici je prikazan elektromehanički regulator. Ulazna promenljiva je signal greške u obliku električnog napona *e(t)*, a izlazna (upravljačka) veličina je pomeraj poluge *u(t)*. Pretpostavlja se da je veza između napona *e(t)* i elektromagnetne sile u jezgru linearna, preko koeficijenta razmere *k*. Zanemaruju se sve mase, a između sila, pomeraja i brzina kod opruge i prigušivača primenjuju se linearni odnosi. Formirati diferencijalnu jednačinu koja opisuje zavisnost izlazne promenljive *u(t)* od ulaza *e(t)*. Koeficijent krutosti opruge je *C*, a koeficijenti viskoznog trenja u prigušivačima (uljnim cilindrima) su D_1 i D_2.



Rešenje:

Elektromotorna sila: F_m=ek (1)

Sila koja deluje na krajevima opruge je: F_o=C(u-x1) (2)

Sila u prvom prigušivaču: $F_1 = D_1 \frac{dx_1}{dt}$ (3)

Sila u drugom prigušivaču: $F_2 = D_2 \frac{du}{dt}$ (4)

Na osnovu ravnoteže sila u tačkama 0 i 1 slede izrazi:

$F_m=F_0+F_2$ (5)

$F_o=F_1$. (6)

Nakon zamene desnih strana izraza (1)-(4) u izraze (5) i (6) sledi:

$$ek = C(u - x_1) - D_2 \frac{du}{dt} \tag{7}$$

$$C(u - x_1) = D_1 \frac{dx_1}{dt} \tag{8}$$

Izražavanjem x_1 iz jednačine (7) i zamenom u (8) nakon sređivanja sledi traženi izraz:

$$\frac{D_1 D_2}{C} \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \left(D_1 + D_2\right) \frac{du(t)}{dt} = \frac{D_1 k}{C} \frac{de(t)}{dt} + ke(t) \tag{9}$$

Elektromehaničke analogije

Jednačine koje opisuju neke pojave u elektrotehnici imaju isti oblik kao jednačine mnogih pojava u mehanici, termodinamici, hidraulici, pneumatici itd. Na osnovu takvih analogija, za mnoge pojave neelektrične prirde mogu se formirati električne mreže čije se ponašanje opisuje jednačinama istog oblika. Neke od elektromehaničkih analogija su prikazane u tabeli 1.

Električne veličine		Mehaničke veličine
napon u(t) [V]	⇔	sila f(t) [N]
struja i(t) [A]	⇔	brzina v(t) [m/s]
količina naelektrisanja q(t) [C]	⇔	položaj x(t) [m]
induktivnost L [H]	⇔	masa M [kg]
kapacitivnost C [F]	⇔	recipročna vrednost koeficijenta elastičnosti opruge 1/K
električna otpornost R [Ω]	⇔	trenje F

Tabela 1. Analogne veličine

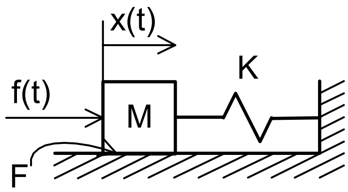
Analogije navedene u tabeli 1 spadaju u najčešće korištene. Analogije je moguće postaviti i na drugi način, što zavisi od načina pristupa problemu o čemu će biti reči kasnije. Na osnovu postavljenih analogija moguće je za simulaciju ponašanja, umesto mehaničkih sistema, koristiti, mnogo pogodnija, električna kola. U cilju konstruisanja složenih analognih kola uvedena su sledeća pravila:

1. mehanički elementi sa istom translatornom ili rotacionom brzinom kretanja se nalaze u paralelnoj mehaničkoj vezi;
2. mehanički elementi čije je translatorno ili rotaciono kretanje dato zbirom ili razlikom dveju brzina nalaze se u rednoj mehaničkoj vezi;
3. mehaničkim elementima u paraleli odgovaraju električni elementi vezani na red;
4. mehaničkim elementima vezanim na red odgovaraju električni elementi vezani u paralelu.

Primer:

Formirati diferencijalne jednačine i funkcije prenosa koje opisuju sisteme sa slika 1 – 4, i uspostaviti analogije između električnih i mehaničkih veličina.

Mehanički sistem sa translatornim kretanjem:



Slika 1

M – masa;
K – koeficijent elastičnosti opruge;
F – koeficijent trenja;
x(t) – pomeraj (položaj) tela
f(t) – spoljna sila pod čijim se dejstvom vrši kretanje

Jednačina ravnoteže sila sistema sa slike 1 je:

$$M\ddot{x}(t)+F\dot{x}(t)+Kx(t)=f(t). \qquad (1)$$

Nakon uvođenja smene $v(t)=\dot{x}(t)$, izraz (1) postaje:

$$M\frac{dv(t)}{dt}+fv(t)+K\int_0^t v(t)dt=f(t); \qquad (2)$$

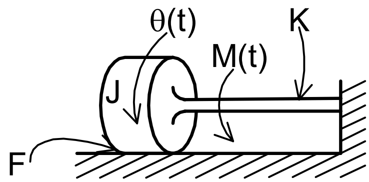
što nakon primene Laplasove transformacije daje:

$$MsV(s)+FV(s)+K\frac{V(s)}{s}=F(s). \qquad (3)$$

Funkcije prenosa sistema sa slike 1 je:

$$G(s)=\frac{V(s)}{F(s)}=\frac{s}{Ms^2+Fs+K}. \qquad (4)$$

<u>Mehanički sistem sa rotacionim kretanjem:</u>



Slika 2

J – momenat inercije valjka;
K – koeficijent elastičnosti opruge;
F – koeficijent trenja;
θ(t) – ugaoni pomeraj (položaj) tela;
f(t) – spoljni momenat pod čijim se dejstvom vrši kretanje.

Jednačina ravnoteže momenata sistema sa slike 2 je:

$$J\ddot{\theta}(t)+F\dot{\theta}(t)+K\theta(t)=M(t). \qquad (5)$$

Nakon uvođenja smene $\omega(t)=\dot{\theta}(t)$, izraz (5) postaje:

$$J\frac{d\omega(t)}{dt}+f\omega(t)+K\int_0^t \omega(t)dt=M(t); \qquad (6)$$

što nakon primene Laplasove transformacije daje:

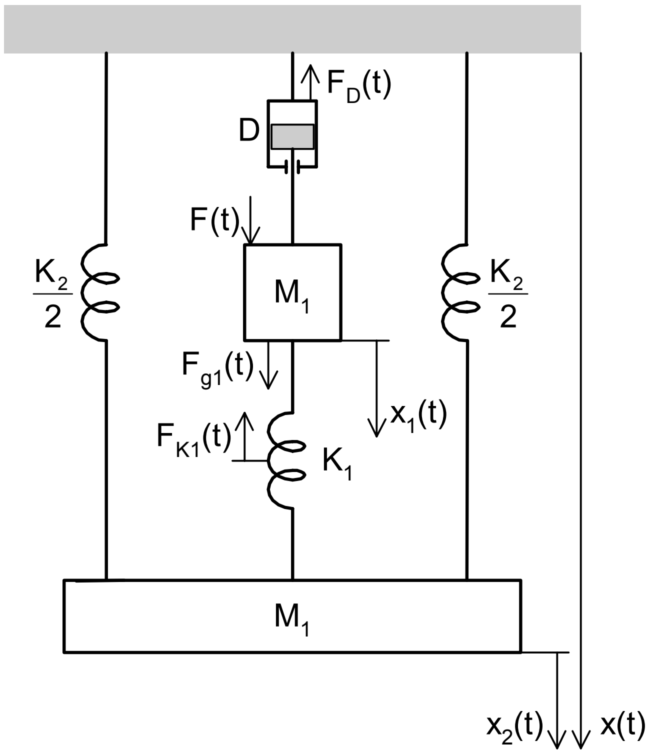
$$Js\Omega(s)+F\Omega(s)+K\frac{\Omega(s)}{s}=M(s). \qquad (7)$$

Funkcije prenosa sistema sa slike 2 je:

$$G(s)=\frac{\Omega(s)}{M(s)}=\frac{s}{Js^2+Fs+K}. \qquad (8)$$

Primer:

Formirati matematički model mehaničkog sistema sa slike 1:



Slika 1.

Rešenje:

Prema oznakama sa slike 1 je:

$m_i\ddot{x}_i = m_i \frac{d^2x_i}{dt^2}$ - sila inercije;

$F_D = D\dot{x} = D\frac{dx}{dt}$ - sila viskoznog trenja;

$F_{Ki} = K_i x_i$ – sila elastičnosti opruge;

$F_{gi} = m_i g$ – sila težine tela;

F(t) – pokretačka (spoljna) sila;

x1,x2 – generalisane koordinate.

Translatorno kretanje krutog tela je opisano diferencijalnom jednačinom $m\vec{a} = \vec{F}$, što predstavlja drugi osnovni zakon mehanike. Primenom ovog zakona na dati slučaj sledi:

$$m_i\ddot{x}_i = \Sigma F_{x \text{ spoljnih sila}}. \tag{1}$$

Ako se usvoje generalisane koordinate *$x_1(t)$* i *$x_2(t)$*, na osnovu (1) se formira jednačina ravnoteže sila koje deluju na telo *m_1*:

$$m_1\ddot{x}_1 = F(t) - F_D - F_{K1} + F_{g1}; \tag{2}$$

gde je: $F_D = D\dot{x}_1$; $F_{K1} = K_1 x = K_1(x_1 - x_2)$; $F_{g1} = m_1 g$; pa se (2) može napisati u obliku:

$$m_1\ddot{x}_1=F(t)-D\dot{x}_1-K_1(x_1-x_2)+m_1g. \tag{3}$$

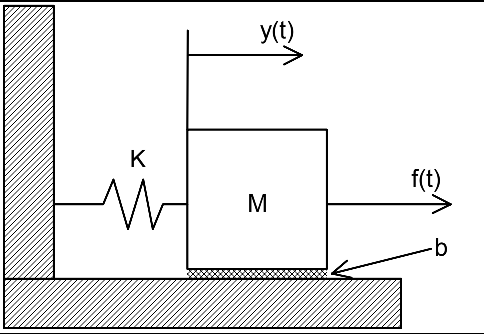
Jednačina ravnoteže sila koje deluju na telo m_2 je:

$$m_2\ddot{x}_2=m_2g-K_2x_2-K_1(x_2-x_1). \tag{4}$$

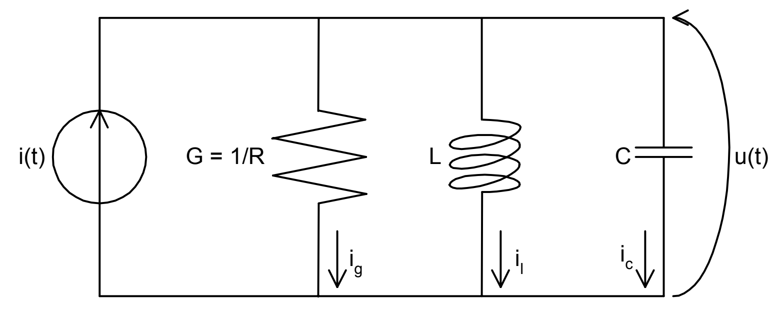
Napomena: Obratiti pažnju na smer dejstva sila (poslednji sabirak) kod formiranja jednačine 4.

Linearizacija (linearna aproksimacija) fizičkih sistema

Većina fizičkih sistema je linearna u određenim granicama (za određene vrednosti promenljivih veličina). Svi sistemi su nelinearni ako vrednosti promenljivih izađu iz određenih granica. Na primer, ranije opisan slučaj sa masom i oprugom, slika 1. Sistem je linearan dok su pomeranja y(t) mala. Ako se telo mase M pomeri za veliko y(t) tada će se opruga K istegnuti preko mere i pući. Iz tog razloga pitanje linearnosti i uslova pod kojima ona egzistira mora biti razmatrano za svaki sistem pojedinačno. Osobina linearnosti sistema se definiše preko pojmova pobude (ulaza) i odziva (izlaza) sistema.



Slika 1.



Slika 2.

Za električnu mrežu na slici 2 pobuda je struja i(t) a odziv napon u(t). Generalno, mi ćemo pobudu (ulaz) označavati sa u(t) (nema veze sa naponom) a odziv (izlaz) sa y(t). Neophodan uslov da bi sistem bio linearan može se definisati preko pojmova pobude i odziva na sledeći način.

1. Ako se sistem pobudi pobudom $u_1(t)$, daje odziv $y_1(t)$. Ako se sistem pobudi pobudom $u_2(t)$, daje odziv $y_2(t)$. Da bi sistem bio linearan potrebno je da pobuda $u_1(t)+u_2(t)$ rezultuje odzivom $y_1(t)+y_2(t)$. Ovaj princip se zove <u>*princip superpozicije*</u>.
2. Ako sistem pobuđen pobudom u(t) daje odziv y(t), tada, ako je sistem linearan, za pobudu $\beta u(t)$ (β=const.) daje odziv $\beta y(t)$. Ovaj princip se zove <u>*princip homogenosti*</u>.

Def. Da bi sistem bio linearan mora zadovoljavati principe superpozicije i homogenosti.

Sistem opisan relacijom $y(t)=u^2(t)$ nije linearan jer ne zadovoljava princip superpozicije. $u_1^2(t)=y_1(t)$; $u_2^2(t)=y_2(t)$. Po principu superpozicije bi moralo biti: $(u_1(t)+u_2(t))^2=y_1(t)+y_2(t)=u_1^2(t)+ u_2^2(t)$, što nije tačno.

Sistem $y(t)=mu(t)+b$ nije linearan jer ne zadovoljava princip homogenosti: $m\beta u(t)+b\neq\beta y(t)$.

Ipak, drugi primer $y(t)=mu(t)+b$ se može razmatrati u radnoj tački[1] (u_0,y_0) za male promene Δu i Δy, tako da je $u=u_0+\Delta u$ i $y=y_0+\Delta y$. Sada se umesto $y=mu+b$ može napisati $y_0+\Delta y=mu_0+m\Delta u+b$, gde izraz $\Delta y=m\Delta u$ zadovoljava uslove linearnosti.

[1] Radna tačka predstavlja radni režim u kome su sve promenljive poznate i konstantne. Na primer za jednosmerni motor čiji je nominalni napon 260V i nominalna brzina obrtanja 1750o/min, nominalni radno režim predstavlja jednu moguću (najčešću, uobičajenu) radnu tačku. Tada se motor opterećen nominalnim opterećenjem priključen na nominalni napon obrće nominalnom brzinom, pri čemu vuče nominalnu struju. Male promene, odnosno okolina radne tačke, bi predstavljale promene izlaza pod uticajem malih promena ulaza. Na primer, ako se ulazni napon menja u granicama ±2%, tada se i brzina obrtanja menja u tim granicama, to jest ako je u(t)=260±5V onda je n(t)=1750±30o/min, što na radnoj karakteristici definiše pravolinijski segment umesto (radne) tačke.